This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Mc Th 3008.56 (1-2)

HARVARD COLLEGE

SCIENCE CENTER
LIBRARY

RÉSUMÉ

DES

LEÇONS D'ANA

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHN

I.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Cᵉ, rue Racine, 26.

RESUMÉ

DES

LEÇONS D'ANA

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHN

PAR M. NAVIER,

Membre de l'Académie des sciences, Professeur d'analyse et polytechnique, Inspecteur divisionnaire des ponts et

SUIVI DE NOTES

PAR M. J. LIOUVIL

Membre de l'Institut et du bureau des l

DEUXIÈME ÉDITION,

revue

PAR M. ERNEST LIOUVIL

Ancien élève de M. Arago à l'Observatoir

1.

PARIS.

LIBRAIR VICTOR DALMONT, ÉDI

Successeur de Carilian-Gœury et Vor D

DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHA

Quai des Augustins, n°

1856

~~VI, 4261~~

Math 3008.56 (1-2)

Transferred from

The Lawrence Scientific School,

9 February, 1888.

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY
AUG 29 1956

AVERTISSEMENT.

Dans cette deuxième édition, comme dans la première, on donne le texte des Leçons de M. Navier conforme à celui des feuilles lithographiées distribuées aux élèves de l'École polytechnique. Il n'appartenait pas à l'Éditeur d'y rien changer. Cependant quelques améliorations ont été introduites. On avait déjà profité, dans la première édition, des corrections laissées par l'auteur dans ses papiers. Cette fois on a conféré les rédactions successives qu'il avait faites d'année en année; et quand elles se sont trouvées différentes, on a choisi celle qu'on a crue la meilleure, fût-elle plus ancienne. On a été ainsi conduit à des changements de détail qui ne sont pas sans importance.

Les Notes que M. J. Liouville avait ajoutées à la première édition se retrouvent ici, corrigées et augmentées. Les Notes I, IV, VIII, IX sont nouvelles.

Les épreuves ont été revues avec soin par M. Ernest Liouville, sous la direction de son père.

TABLE DES MATIÈRES.

COURS DE LA PREMIÈRE ANNÉE, OU PREMIÈRE PARTIE.

Pages.

I. Des fonctions en général. Des fonctions dérivées et des différentielles. 1

II. Différentiation des fonctions simples d'une seule variable. . 11

1° Fonction $y = x^m$, m désignant une constante. . . . 13

2° Fonction logarithmique $y = \log.x$. 18

3° Fonction exponentielle $y = a^x$, a désignant une constante. 19

4° Fonctions trigonométriques $y = \sin.x$ et $y = \cos.x$. 21

III. Différentiation des fonctions composées ou fonctions de fonctions d'une seule variable. 22

Usage des règles précédentes. 26

IV. Différentiation des fonctions de plusieurs variables indépendantes. 36

V. Différentiation des fonctions implicites. 42

VI. Différentielles des divers ordres pour les fonctions d'une seule variable. 46

Différentielles des divers ordres des fonctions simples. 55

VII. Différentielles des divers ordres pour les fonctions de plusieurs variables. 62

VIII. Différentielles des divers ordres pour les fonctions implicites. 68

IX. Changement de la variable indépendante. 70

X. Expression générale du développement d'une fonction suivant les puissances entières de la variable. Théorème de Taylor. 78

Des cas où, pour certaines valeurs particulières de la variable, la série de Taylor ne donne point le développement de la fonction. 92

Valeurs des quantités qui se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. 95

XI. Développement des fonctions simples d'une variable. . . . 101

1° Fonction x^m. 101

2° Fonction logarithmique $\log.x$. 103

3° Fonction exponentielle a^x. 108

4° Fonctions trigonométriques $\sin.x$ et $\cos.x$. 109

XII. Relations qui existent entre les fonctions exponentielles et les fonctions trigonométriques. 112

Formule de Moivre. Résolution des équations binômes. 117

Pages.

Remarques sur les expressions imaginaires. Expressions générales des logarithmes et des sinus et cosinus. 130
Expressions des puissances du cosinus et du sinus d'un arc en fonction des cosinus et des sinus des arcs multiples. 136
XIII. Extension de la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables. 140
XIV. Maxima et minima des fonctions d'une ou de plusieurs variables. 144
Cas où il existe des relations entre les variables. . . . 159
XV. Différentielles de l'aire et de l'arc d'une courbe plane. . . . 164
XVI. Du contact des courbes planes. 166
XVII. Tangentes et normales aux courbes planes. Asymptotes. . . 172
XVIII. Cercle osculateur. Développées des courbes planes. 184
Développées. 192
Exemples de l'application des résultats précédents. . . 195
XIX. Courbes planes rapportées aux coordonnées polaires. 200
Courbes nommées spirales. 207
XX. Points singuliers des courbes planes. 210
XXI. Plans tangents et normales aux surfaces courbes. 215
XXII. Courbes à double courbure. 225
Plan osculateur. Rayons de la première courbure et de la seconde courbure. 231
Développées. 247
Exemple de l'application des résultats précédents. . . 257
XXIII. Intégration des fonctions différentielles les plus simples d'une seule variable. 268
XXIV. Intégration des fonctions rationnelles entières et fractionnaires. 281
XXV. Intégration des fonctions différentielles affectées d'un radical du second degré. Différentielles binômes. 294
Différentielles binômes. 302
XXVI. Intégration des fonctions différentielles logarithmiques, exponentielles et circulaires. 307
XXVII. Intégration par séries. 315
XXVIII. Intégrales définies. 319
XXIX. Usage des intégrales définies pour l'évaluation des longueurs des courbes, des aires et des volumes. 328
1° Aires des courbes planes. 328
2° Longueurs des courbes planes. 337
3° Longueurs des courbes à double courbure. 347
4° Volumes des solides de révolution. 348
5° Aires des surfaces de révolution. 351
6° Volumes des solides d'une figure quelconque. . . . 355
7° Aires des surfaces d'une figure quelconque. 364

RÉSUMÉ

DES

LEÇONS D'ANALYSE

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PREMIÈRE ANNÉE.

I. DES FONCTIONS EN GÉNÉRAL. DES FONCTIONS DÉRIVÉES ET DES DIFFÉRENTIELLES.

1. L'analyse algébrique considère les relations qui existent entre des quantités *connues* et des quantités *inconnues*, relations qui sont exprimées par des équations. Elle a pour objet principal de trouver les valeurs déterminées des inconnues qui satisfont à des équations données. En général, chaque inconnue prend une valeur unique lorsque les équations sont du premier degré, ou plusieurs valeurs différentes lorsque les équations sont d'un degré plus élevé : mais ces valeurs sont toujours des quantités déterminées réelles ou imaginaires.

L'analyse différentielle et intégrale, et toutes les parties

des mathématiques qui en dépendent, considèrent les relations qui existent entre les quantités *constantes* (c'est-à-dire qui conservent toujours une même valeur) et les quantités *variables*. Ces relations sont toujours exprimées ou censées exprimées par des équations. Mais le nombre des quantités appelées variables étant plus grand que celui des équations, ces quantités peuvent prendre une infinité de valeurs différentes, qui sont seulement assujetties à satisfaire aux équations données.

2. Admettons que la question dont on s'occupe comporte n équations, et qu'il y ait un nombre m de variables plus grand que n. Comme n équations ne peuvent déterminer que n inconnues, il y aura $m - n$ variables dont les valeurs demeureront arbitraires. Mais quand on aura fixé ces valeurs à volonté, celles des n autres variables se trouveront entièrement déterminées. C'est ce qu'on exprime en disant que ces dernières variables sont *fonctions* des premières. En général, on distingue dans chaque question : 1° *les variables indépendantes* auxquelles on peut attribuer des valeurs quelconques; 2° les variables dont les valeurs sont déterminées quand on s'est donné celles des premières, et qui en sont des fonctions. On peut choisir à volonté celles des variables qui seront indépendantes; mais les formes du calcul exigent que ce choix étant fait, rien ne soit changé à cet égard dans le cours de l'opération; ou du moins un tel changement exigerait des précautions et des transformations particulières.

Pour fixer les idées, considérons deux variables x, y, entre lesquelles il existe une seule équation. La valeur de l'une de ces variables, de x par exemple, peut être prise arbitrairement; mais à cette valeur arbitraire correspondra toujours une valeur déterminée pour y. Ainsi x sera la variable indépendante, et y une fonction de x.

Si l'on avait trois variables x, y, z, et une seule équation entre ces variables, on pourrait regarder x et y comme indépendantes, et z serait fonction de x et y. Mais s'il existait deux équations entre x, y et z, la seule variable x serait indépendante, et les variables y et z seraient chacune fonction de x.

Ces notions s'étendront facilement aux cas où l'on aurait un plus grand nombre de variables et d'équations.

3. On exprime qu'une quantité y est fonction d'une autre quantité x (c'est-à-dire que y doit prendre une valeur déterminée quand on donne à x une valeur arbitraire) en écrivant

$$y = f(x) \quad \text{ou} \quad y = \mathrm{F}(x), \text{ etc.}$$

Lorsque z est fonction de deux variables x, y, on écrit

$$z = f(x, y) \quad \text{ou} \quad z = \mathrm{F}(x, y);$$

et ainsi de suite.

Une expression analytique formée d'une manière quelconque des variables x, y, z, et d'autres quantités constantes, s'exprimera donc par $\mathrm{F}(x, y, z)$, en sorte qu'une équation quelconque entre les variables x, y, z est représentée par

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0.$$

Si cette équation est résolue par rapport à z, elle prendra la forme $z = f(x, y)$.

4. Soit la relation donnée,

$$y = f(x):$$

admettons que l'on attribue à la variable indépendante x

toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et considérons les valeurs correspondantes que prendra la fonction y. La géométrie donne le moyen de se représenter facilement la succession de ces valeurs. On peut prendre x pour une abscisse comptée à partir d'une origine fixe sur un certain axe, et y pour l'ordonnée correspondante comptée sur un axe perpendiculaire au premier. Les valeurs de y correspondantes à celles de x dans l'équation donnée $y = f(x)$ appartiendront à une ligne MN (*fig.* 1), dont la figure indiquera la marche des valeurs dont il s'agit. Il est nécessaire d'avoir toujours présent à l'esprit, non pas telle valeur particulière de x et la valeur correspondante de y, mais l'ensemble des valeurs correspondantes de ces deux variables.

5. Parmi les propriétés que peut offrir la fonction $y = f(x)$, ou la ligne qui représente cette fonction, la plus remarquable, celle qui est l'objet principal du calcul différentiel, et dont la considération se reproduit constamment dans toutes les applications de ce calcul à la physique et aux arts, est le degré de rapidité avec lequel la fonction varie lorsque la variable indépendante x vient à varier. Ce degré de rapidité de l'accroissement de la fonction, quand on fait croître la variable, peut différer, non-seulement d'une fonction à une autre, mais encore pour la même fonction, suivant la valeur attribuée à la variable, à partir de laquelle on suppose que l'accroissement de cette variable a lieu. Pour nous former des notions précises sur ce point, attribuons à x une valeur déterminée représentée par OP, à laquelle correspondra une valeur également déterminée $y = f(x)$, représentée par MP. Supposons ensuite que x augmente à partir de cette valeur d'une quantité quelconque que nous désignerons par Δx, et qui sera représentée par PQ. La fonction y variera en conséquence d'une certaine quantité,

que nous désignerons également par Δy, en sorte que l'on aura

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

ou

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

La nouvelle valeur affectée par la fonction y est représentée dans la figure par NQ, et NR représente Δy ou la variation subie par cette fonction. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, dont l'expression est

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

est représenté par la tangente trigonométrique de l'angle NMR formé par la sécante MN avec l'axe des x.

6. Il est visible que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est l'expression naturelle de la propriété dont nous avons parlé, c'est-à-dire du degré de rapidité avec lequel la fonction y croît quand on fait croître la variable indépendante x : car plus la valeur de ce rapport sera grande, plus l'accroissement de la fonction sera considérable quand on fera croître la variable de la quantité donnée Δx. Mais il est bien important de remarquer que la valeur de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (à l'exception du seul cas où la ligne MN serait une ligne droite) dépendra non-seulement de la valeur attribuée à x, c'est-à-dire du point M où l'on s'est placé sur la courbe, mais encore de la grandeur absolue attribuée à l'accroissement Δx. Si nous laissions cet accroissement arbitraire, nous serions dans l'impossibilité d'assi-

gner au rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dont il s'agit aucune valeur précise, et il est absolument nécessaire d'adopter une convention qui fasse disparaître à cet égard toute indécision.

Supposons qu'après avoir donné à Δx une valeur quelconque, à laquelle répondra une certaine valeur pour Δy et une certaine direction de la sécante MN, on diminue progressivement la valeur de Δx, en sorte que cet accroissement finisse par devenir égal à zéro. L'accroissement correspondant Δy variera en conséquence, et tendra également en général à devenir égal à zéro. Le point N tendra à se confondre avec le point M, et la sécante MN à coïncider avec la tangente MT menée à la courbe au point M. Quant au rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ des deux accroissements, il s'approchera également d'une certaine limite, qui est représentée par la tangente trigonométrique de l'angle TMR formé par la tangente MT avec l'axe des abscisses.

Si la variation Δx était négative et diminuait l'abscisse x au lieu de l'augmenter, on pourrait faire les mêmes remarques. A mesure que la valeur absolue de cette variation serait supposée plus petite et s'approchant davantage de zéro, la variation correspondante Δy de l'ordonnée approcherait également de zéro. La secante menée par les deux points de la courbe correspondants aux abscisses $x + \Delta x$ et x tendrait de plus en plus à se confondre avec la tangente menée au point M correspondant à l'abscisse x. Enfin la valeur de rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ des deux variations s'approcherait indéfiniment de la limite dont on a parlé ci-dessus, c'est-à-dire de la tangente trigonométrique de l'angle compris entre la tangente de la courbe et l'axe des abscisses.

7. On voit que lorsque l'accroissement Δx, et par conséquent l'accroissement correspondant Δy, diminuent progressivement et tendent à devenir égaux à zéro, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de ces accroissements s'approche en général d'une limite dont la valeur est finie et déterminée. Or la valeur du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ correspondante à cette limite doit être considérée comme donnant la mesure véritable et précise de la propriété dont il a été question n° 5, c'est-à-dire de la rapidité avec laquelle la fonction varie quand on fait croître la variable indépendante : car il ne reste dans l'expression de cette valeur rien d'arbitraire ; elle ne dépend plus des valeurs absolues des deux accroissements Δx et Δy, ni de la figure de la courbe à une certaine distance finie de part et d'autre du point M. Elle dépend seulement de la *direction* de la courbe en ce point, c'est-à-dire de l'inclinaison de la tangente sur l'axe des abscisses. Le rapport, ainsi déterminé, exprime ce que Newton nommait la *fluxion* de l'ordonnée. Quant à la manière d'en trouver dans chaque cas particulier la valeur, il est visible qu'il suffit de considérer l'expression générale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

et de voir quelle est la limite dont cette expression s'approche, à mesure que Δx prend des valeurs de plus en plus petites et tend à devenir égale à zéro. Cette limite sera une certaine fonction de la variable indépendante x, dont la nature dépend de celle de la fonction donnée $f(x)$.

8. Il est nécessaire de distinguer le cas où l'on regarde ainsi l'accroissement Δx de la variable indépendante comme

s'approchant indéfiniment de zéro, ou ayant une valeur indéterminée plus petite que tout nombre donné. Cet accroissement est dit alors infiniment petit. L'accroissement correspondant Δy a aussi alors en général une valeur plus petite que tout nombre donné, ou infiniment petite, dont le rapport avec Δx est déterminé. Ce rapport doit être regardé comme s'approchant indéfiniment de la limite dont il a été question ci-dessus, ou différant de cette limite d'une quantité moindre que tout nombre donné.

La considération de la limite dont il s'agit étant très-importante, les géomètres lui ont affecté des dénominations et des signes particuliers. Les variations Δx et Δy sont appelées en général les *différences* de la variable x et de la fonction y, parce qu'on considère Δx comme la différence de deux valeurs consécutives de x, et Δy comme la différence des deux valeurs correspondantes de y. Mais si Δx et Δy sont supposées infiniment petites, ces différences sont alors appelées les *différentielles* des variables x et y; et pour distinguer ce cas on emploie la caractéristique d à la place de Δ, en écrivant dx et dy. La limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, à mesure que Δx diffère de moins en moins de zéro, est exprimée par $\frac{dy}{dx}$. La fonction de x qui donne la valeur de la limite $\frac{dy}{dx}$ est appelée *coefficient différentiel*, ou, d'après Lagrange, *fonction dérivée*, parce qu'elle dérive de la fonction *primitive* $f(x)$, et peut se déduire de cette fonction par des opérations déterminées.

En considérant sous ce dernier point de vue la limite dont il s'agit, Lagrange représente la fonction dérivée de y ou $f(x)$ par y' ou par $f'(x)$, notations qui sont fréquemment employées par les géomètres.

9. Remarquons que la distance NR, qui représente la différence Δy, est composée de deux parties TR et NT, qui toutes deux tendent à devenir nulles quand Δx approche d'être égal à zéro. Comme l'angle TNR a pour tangente trigonométrique la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ou $\frac{dy}{dx}$, on a $TR = \frac{dy}{dx}\Delta x$. Quant à la ligne NT, puisqu'elle devient nulle en même temps que Δx, on peut la représenter en général par $\omega\Delta x$, ω désignant une fonction de x et Δx. Nous écrirons donc également

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx} + \omega\right)\Delta x, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \omega.$$

Tant que les accroissements Δx et Δy conserveront des valeurs subsistantes, aussi petites qu'on le voudra, la quantité ω conservera elle-même une valeur semblable; mais si l'on pose $\Delta x = 0$, on aura $\omega = 0$, puisque, dans cette hypothèse, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ devient égal à $\frac{dy}{dx}$.

Si donc on veut indiquer que l'on considère, non pas la valeur véritable du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, mais la limite vers laquelle tend cette valeur lorsque Δx et Δy tendent à devenir égaux à zéro, ce que l'on fait, comme on l'a dit ci-dessus, en remplaçant Δx par dx et Δy par dy, il faudra supposer ω nulle, et écrire simplement $dy = \frac{dy}{dx}dx$. C'est ce qu'on exprime en disant que la différentielle de la fonction y est égale au produit de la différentielle dx de la variable indépendante par la limite $\frac{dy}{dx}$ du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ des différences correspondantes des deux variables; et c'est par cette raison que cette limite $\frac{dy}{dx}$

est nommée *coefficient différentiel*. Le principe dont il s'agit est mis en évidence par la nature de la notation que nous présentons ici et que les géomètres ont généralement adoptée d'après Leibnitz.

10. En résumant les notions précédentes et considérant une fonction quelconque y d'une seule variable indépendante x, on doit se représenter la variable x comme croissant progressivement depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et prenant successivement des valeurs dont chacune surpasse la précédente de la quantité dx supposée infiniment petite, c'est-à-dire plus petite que toute grandeur donnée. Cette quantité dx, exprimant la différence de deux valeurs consécutives de x, peut être supposée à volonté constante ou variable dans toute l'étendue de la série. Mais quand il s'agit d'une variable indépendante, il est plus simple, et dans l'esprit du calcul différentiel, de supposer la différentielle dx constante. A mesure que l'on passe ainsi d'une valeur a de x à une autre valeur A, par un nombre infini de termes intermédiaires séparés par l'intervalle constant dx, on passe également de la valeur b de la fonction y, correspondante à la valeur a de x, à la valeur B correspondante à la valeur A. Chaque fois que x croît de la différentielle dx, y varie de la différentielle correspondante dy, qui peut être positive ou négative. Nous regardons la différentielle dx, qui est arbitraire, comme constante, et nous lui attribuons toujours la même valeur, quelle que soit x. Mais x et dx étant données, dy dépendra de la nature de la fonction. On reconnaîtra cette dernière différentielle quand on aura déterminé, en fonction de la variable x, l'expression de la limite $\frac{dy}{dx}$ du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, puisque l'on a toujours $dy = \frac{dy}{dx} dx$. Cette limite $\frac{dy}{dx}$ exprime

et mesure la rapidité avec laquelle la valeur de la fonction varie dans les diverses parties de son cours, à mesure que la variable varie elle-même.

11. Nous n'ajouterons ici qu'une remarque dont l'évidence est bien frappante. C'est que les différentielles indiquées ci-dessus par dx et dy représentent toujours des quantités de même nature que les quantités représentées par les variables x et y. Ainsi dans la géométrie, lorsque x représente une ligne, une aire, un volume, la différentielle dx représente elle-même une ligne, une aire ou un volume. Les différentielles sont des quantités censées plus petites que toute grandeur donnée ; mais cette hypothèse n'altère point la nature de ces quantités : dx et dy sont toujours homogènes avec x et y, c'est-à-dire présentent toujours le même nombre de dimensions de l'unité au moyen de laquelle les valeurs de ces variables sont exprimées.

II. DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS SIMPLES D'UNE SEULE VARIABLE.

12. *Différentier* une fonction, que nous désignons toujours par

$$y = f(x),$$

c'est chercher l'expression de sa différentielle dy, ou de la variation infiniment petite que subira y lorsque la variable indépendante x croîtra de sa différentielle dx. D'après ce qui a été dit dans l'article précédent, cette recherche se réduit à considérer le rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

et à déterminer la limite $\frac{dy}{dx}$, dont la valeur de ce rapport s'approche indéfiniment à mesure que Δx approche de devenir égale à zéro. On aura en effet pour la différentielle cherchée

$$dy = \frac{dy}{dx}\, dx.$$

Or il existe dans l'analyse un petit nombre de fonctions simples ou élémentaires pour lesquelles l'expression de la limite dont il s'agit exige une recherche spéciale. Quand on l'aura effectuée pour ces fonctions, une fonction quelconque, qui sera toujours composée des premières, ne présentera plus de difficultés.

13. Ces fonctions simples sont : 1° la fonction x^m, c'est-à-dire la variable élevée à une puissance marquée par l'exposant m, lequel peut être un nombre constant quelconque, entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

2° La fonction logarithmique, ou $\log.x$. On sait que l'on entend par $\log.x$ l'exposant de la puissance à laquelle on doit élever un certain nombre constant, appelé la base du système, pour obtenir le nombre x ; en sorte que a désignant cette base, on a $a^{\log.x} = x$. Par conséquent, en donnant la fonction $\log.x$, il faut toujours donner la base a du système auquel appartient le logarithme.

3° La fonction exponentielle a^x, dans laquelle la variable est l'exposant de la puissance à laquelle un nombre constant doit être élevé.

4° Les fonctions trigonométriques $\sin.x$ et $\cos.x$, dans lesquelles x désigne un arc quelconque compté d'une origine fixe sur la circonférence d'un cercle dont le rayon est égal à l'unité.

Nous allons considérer successivement ces diverses fonctions.

1° Fonction $y = x^m$, m désignant une constante.

14. Le cas le plus simple est celui où l'exposant m est un nombre entier positif. Il est très-facile alors de trouver la différentielle de la fonction y. La formule générale, rappelée n° 12, donne

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x};$$

ou en développant le terme $(x + \Delta x)^m$ par la formule du binôme de Newton, qui est démontrée dans les éléments d'algèbre pour le cas de l'exposant m entier et positif,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}.\Delta x + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}(\Delta x)^2 + \ldots\ldots + (\Delta x)^{m-1}.$$

Or, quand Δx tend à devenir nulle, tous les termes du second membre tendent également à devenir nuls, à l'exception du premier. La limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, c'est-à-dire le coefficient différentiel ou la fonction dérivée de x^m, est donc

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1};$$

et l'on a par conséquent, pour la différentielle de cette fonction,

$$dy = mx^{m-1}.dx.$$

15. Cette formule donne également l'expression de la différentielle demandée, quelle que soit la constante m. Pour le démontrer, observons que l'on a $(x+\Delta x)^m = \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m . x^m$, d'où il suit que la quantité $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ peut être mise sous la forme

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1}{\frac{\Delta x}{x}} . x^{m-1}.$$

Soit fait pour abréger $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$. On voit qu'il s'agit de trouver la limite dont s'approche indéfiniment le rapport $\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha}$ lorsque la quantité α tend à devenir égale à zéro. Or, α étant supposée infiniment petite, on peut écrire évidemment

$$(1+\alpha)^m = 1 + \beta,$$

β étant également une quantité infiniment petite qui deviendrait nulle en même temps que α. L'expression précédente de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ devient alors

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\beta}{\alpha} . x^{m-1};$$

en sorte que tout se réduit à trouver la limite du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$.

16. Pour y parvenir, considérons l'expression

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

et proposons-nous de trouver la limite vers laquelle tend sa valeur lorsque α tend à devenir égale à zéro; α étant regardée comme pouvant prendre une valeur quelconque, pourvu qu'elle soit plus petite que toute grandeur donnée, on peut écrire $\alpha = \frac{1}{i}$, en désignant par i un nombre entier plus grand que tout nombre donné. L'expression dont il s'agit devient alors

$$\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i,$$

et en la développant par la règle du binôme, on a

$$\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = 1 + i.\frac{1}{i} + \frac{i(i-1)}{2} \cdot \frac{1}{i^2} + \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3} \cdot \frac{1}{i^3} + \text{etc.};$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^i = 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{i}}{2} + \frac{\left(1-\frac{1}{i}\right)\left(1-\frac{2}{i}\right)}{2.3} + \frac{\left(1-\frac{1}{i}\right)\left(1-\frac{2}{i}\right)\left(1-\frac{3}{i}\right)}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Mais quand on suppose que i augmente indéfiniment, les numérateurs de chacun des termes de ce développement tendent tous à devenir égaux à l'unité. D'où l'on conclut que la limite dont s'approche indéfiniment l'expression proposée $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, lorsque α tend à devenir nulle, est exprimée par la série

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

Cette série est évidemment convergente, c'est-à-dire qu'en prenant un nombre de termes de plus en plus grand, les résultats approcheront continuellement d'un certain nombre irrationnel qui ne sera pas dépassé. En effet, tous les termes étant positifs, leur somme augmente progressivement à mesure que l'on en prend un plus grand nombre, et l'on distingue facilement deux limites entre lesquelles cette somme est comprise. Sa valeur est plus grande que 2, et plus petite que 2 augmenté de la progression géométrique $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+$ etc. La somme de cette dernière progression étant égale à l'unité quand on la suppose prolongée à l'infini, on voit que la valeur de la série est comprise entre 2 et 3. Le calcul en est facile, et en se bornant à six décimales on trouve

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\text{etc.}=2{,}718282.$$

Ce nombre étant d'un grand usage dans l'analyse, les géomètres le représentent par la lettre e.

Il résulte donc de ce qui précède que l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ a pour limite, lorsque α tend à devenir égale à zéro, un certain nombre représenté par e, dont l'expression est

$$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\text{etc.}=2{,}718282;$$

et l'on peut remarquer que cette proposition subsiste également lorsque α est négative. Car on peut écrire

$$1-\alpha=\frac{1}{1+\varepsilon},$$

ε désignant une quantité infiniment petite qui devient nulle en même temps que α ; d'où l'on tire

$$(1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}(1+\varepsilon):$$

la limite du second membre étant le nombre e, ce nombre est également la limite du premier membre.

17. Cela posé, revenons à l'équation écrite n° 15

$$(1+\alpha)^m = 1+\beta.$$

En prenant des deux parts, dans un système quelconque, le logarithme, il viendra

$$m \log.(1+\alpha) = \log.(1+\beta), \quad \text{d'où} \quad \frac{\log.(1+\beta)}{\log.(1+\alpha)} = m.$$

Mais en supposant α et β infiniment petits, on a à la limite

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \quad (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = e,$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\alpha}\log.(1+\alpha) = \log.e, \quad \frac{1}{\beta}\log.(1+\beta) = \log.e, \quad \text{d'où} \quad \frac{\log.(1+\beta)}{\log.(1+\alpha)} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Donc

$$\frac{\beta}{\alpha} = m.$$

Ainsi l'on trouve en général pour le coefficient différentie $\frac{dy}{dx}$ l'expression

$$mx^{m-1},$$

qui avait été obtenue dans le n° 14 pour le cas de l'exposant m entier et positif, et d'où l'on conclut

$$d(x^m) = mx^{m-1}.\, dx.$$

18. Nous remarquerons deux cas particuliers, qui se présentent fréquemment et que l'on doit avoir présents à la mémoire. 1° Lorsque $m = \frac{1}{2}$, la formule précédente donne

$$d.\sqrt{x} = d(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

2° Lorsque $m = -1$, elle donne

$$d.\,\frac{1}{x} = d(x^{-1}) = -\frac{dx}{x^2}.$$

2° Fonction logarithmique $y = \log.\, x$.

19. La formule générale du n° 12 donne

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log.\,(x + \Delta x) - \log.\, x}{\Delta x} = \frac{\log.\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Mais d'après ce qu'on a vu n° 16, on a, lorsque Δx devient extrêmement petit, $\log.\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x} \log.e.$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log.e, \qquad \text{et} \qquad dy = \frac{dx}{x} \log.e.$$

20. Le logarithme est supposé pris dans un système quelconque ; si on le prend dans le système dont la base est le

nombre e, log. $e = 1$, et l'on a simplement

$$d.\log.x = \frac{dx}{x}.$$

Ce dernier système est celui des logarithmes appelés ou *hyperboliques*, ou *népériens*, du nom de Neper, inventeur des logarithmes, et qui sont généralement employés dans l'analyse. Nous les désignerons simplement par la caractéristique l, afin de les distinguer des logarithmes dans un système quelconque qui seront désignés par la caractéristique log. Ainsi on aura

$$\frac{d.\log.x}{dx} = \frac{\log.e}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{d.lx}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Fonction exponentielle $y = a^x$, a désignant une constante

21. Nous avons ici, d'après la formule du n° 12,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} a^x.$$

Soit fait $\Delta x = \alpha$; nous pourrons écrire

$$a^\alpha = 1 + \beta,$$

β étant considéré, aussi bien que α, comme une quantité qui peut approcher indéfiniment de zéro. Donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\beta}{\alpha} a^x;$$

et il s'agit de connaître la limite vers laquelle tend le rap-

port $\frac{\beta}{\alpha}$ lorsque α et β tendent à devenir nulles. Prenant des deux parts, dans un système quelconque, les logarithmes dans l'équation

$$a^{\alpha} = 1 + \beta,$$

on a

$$\alpha \log. a = \log. (1 + \beta),$$

et par conséquent

$$\frac{\alpha}{\beta} \log. a = \frac{\log. (1 + \beta)}{\beta}.$$

Or, d'après le n° 17, la limite de $\frac{\log. (1 + \beta)}{\beta}$ est $\log. e$.
Donc à la limite

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\log. a}{\log. e},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log. a}{\log. e} . a^x, \qquad \text{et} \qquad d. a^x = \frac{\log. a}{\log. e} . a^x dx.$$

22. Si les logarithmes sont hyperboliques ou népériens, $\log. e = 1$, et l'on a simplement

$$d . a^x = la . a^x dx.$$

Donc lorsque la constante $a = e$ (*voyez* ci-dessus n° 16),

$$d . e^x = e^x dx.$$

La fonction e^x se reproduit par différentiation, le coeffi-

cient différentiel ou la fonction dérivée ne différant point de la fonction elle-même.

Au reste, on verra, n° 35, que la différentielle de a^x peut se déduire immédiatement de celle de $\log.x$.

Fonctions trigonométriques $y = \sin.x$ et $y = \cos.x$.

23. En posant

$$y = \sin.x$$

nous aurons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin.(x + \Delta x) - \sin.x}{\Delta x} = \frac{\sin.\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cos.\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right) :$$

lorsque Δx approche indéfiniment de zéro, le rapport de $\sin.\frac{1}{2}\Delta x$ à l'arc $\frac{1}{2}\Delta x$ tend vers l'unité, qui est sa limite : la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est donc

$$\frac{dy}{dx} = \cos.x ;$$

d'où l'on conclut que

$$d.\sin.x = \cos.x.dx.$$

De même en posant

$$y = \cos.x ,$$

on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos.(x + \Delta x) - \cos.x}{\Delta x} = -\frac{\sin.\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \sin.\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right),$$

dont la limite est

$$\frac{dy}{dx} = -\sin.x; \qquad \text{d'où} \qquad d.\cos.x = -\sin.x.dx.$$

Ainsi la fonction dérivée de sin.x est cos.x; et réciproquement, la fonction dérivée de cos.x est sin.x, mais pris avec le signe —.

D'ailleurs, la différentielle de sin.x étant connue, on en déduit immédiatement celle de cos.x. C'est ce qu'on verra au n° 33.

III. DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS COMPOSÉES OU FONCTIONS DE FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

24. Les fonctions dont on vient de s'occuper doivent être regardées comme les éléments simples dans lesquels se résolvent toutes les expressions de l'analyse (du moins tant que l'on ne considère pas la partie de cette science qui est du ressort du calcul intégral). En effet, toute formule est composée des fonctions dont il s'agit, combinées entre elles, soit par le moyen des signes qui indiquent les opérations ordinaires de l'algèbre, soit par l'usage des caractéristiques log., sin., cos., que l'on peut regarder comme indiquant d'autres opérations plus compliquées, et dont l'exécution a été facilitée par la construction des tables. La recherche directe de l'expression de la différentielle de trois fonctions x^m, log.x et sin.x, a dû nous occuper d'abord : on peut y ramener la détermination des deux quantités $d.a^x$, $d.\cos.x$ que nous avons obtenues tout à l'heure par des procédés particuliers. A l'égard des autres fonctions plus composées,

il existe des règles faciles, par le moyen desquelles on réduit la recherche de leur différentielle à leur recherche de la différentielle d'une fonction plus simple contenue dans la première. En appliquant ces règles, on parvient progressivement aux derniers éléments dans lesquels la fonction proposée peut se résoudre, et qui se trouvent toujours (en exceptant certaines expressions dont on s'occupera en traitant du calcul intégral) l'une des fonctions simples qui ont été le sujet de l'article précédent. Sachant donc différentier ces fonctions, on sait également différentier toutes les autres.

Pour faire connaître les règles dont on vient de parler, soit en premier lieu

$$y = f(v),$$

v désignant une fonction quelconque de x. Il s'agit d'avoir la différentielle de la variable y, qui est ici ce que l'on nomme une *fonction de fonction* de la variable indépendante x; c'est-à-dire la variation infiniment petite que subit y lorsque x augmente de la quantité infiniment petite dx. En revenant toujours au principe énoncé n° 12, et désignant par Δv l'accroissement de la fonction v correspondant à l'accroissement Δx de x, on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(v + \Delta v) - f(v)}{\Delta x},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(v + \Delta v) - f(v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Supposant ensuite que Δx s'approche indéfiniment de zéro, on devra à la limite remplacer $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, par $\frac{dv}{dx}$, et

$\frac{f(v+\Delta v)-f(v)}{\Delta v}$ par $\frac{dy}{dv}$. Donc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}, \quad \text{d'où} \quad dy=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\cdot dx.$$

Ainsi le coefficient différentiel demandé $\frac{dy}{dx}$ s'obtient ici en prenant d'abord le coefficient différentiel $\frac{dy}{dv}$, comme si v désignait une variable indépendante, puis multipliant par $\frac{dv}{dx}$, qui est le coefficient différentiel de la fonction v pris par rapport à la variable indépendante x.

A cause de $\frac{dv}{dx}dx=dv$, l'équation $dy=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\cdot dx$ revient à celle-ci $dy=\frac{dy}{dv}dv$ dont la forme est la même que si v était la variable indépendante. En posant, par exemple, $y=v^m$, et se rappelant la formule du n° 17, on en conclut que $d(v^m)=mv^{m-1}dv$, quelle que soit la fonction v.

25. Si l'on avait

$$y=f(p),$$

p étant fonction de v et v fonction de x, on aurait d'abord, d'après la règle précédente, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dp}\frac{dp}{dx}$. Mais d'après cette même règle $\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dv}\frac{dv}{dx}$: donc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dp}\frac{dp}{dv}\frac{dv}{dx}. \quad \text{et} \quad dy=\frac{dy}{dp}\frac{dp}{dv}\frac{dv}{dx}dx.$$

Et ainsi de suite.

26. Soit en second lieu

$$y = f(u, v),$$

u et v désignant deux variables qui sont elles-mêmes des fonctions de la variable indépendante x : il s'agit toujours de trouver le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. Remarquons que la différence Δy ou $f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u,v)$ de la fonction proposée est identiquement égale à

$$f(u + \Delta u, v) - f(u,v) + f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v).$$

Donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u,v)}{\Delta x} + \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v)}{\Delta x}.$$

Quant à la limite vers laquelle tend cette expression lorsque Δx tend à devenir égale à zéro, celle du premier terme est évidemment, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, $\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$. La limite du second terme, si Δu était constante, serait $\frac{d.f(u + \Delta u, v)}{dv}\frac{dv}{dx}$: mais comme Δu devient nulle en même temps que Δx, cette dernière quantité ne diffère point de $\frac{d.f(u,v)}{dv}\frac{dv}{dx}$, ou $\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$. D'après cela

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}, \quad \text{et} \quad dy = \left(\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}\right) dx.$$

On voit donc que le coefficient différentiel demandé s'obtient en prenant successivement les coefficients différentiels par

rapport aux deux fonctions u et v, c'est-à-dire en regardant successivement u seule comme variable, et v seule comme variable, et ajoutant les résultats.

27. Si l'on avait

$$y = f(t, u, v),$$

les trois variables t, u, v étant des fonctions de la variable indépendante x, une méthode semblable (*) conduirait à l'expression

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx},$$

d'où

$$dy = \left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}\right) dx;$$

et ainsi de suite s'il y avait un plus grand nombre de fonctions dépendantes de la variable x.

Usage des règles précédentes.

28. Les seules règles qui viennent d'être exposées, réunies aux résultats présentés dans l'article II, suffisent pour trouver la différentielle d'une expression analytique quelconque. Nous ajouterons ici quelques remarques propres à faciliter ce genre d'opérations.

Lorsque la fonction est composée d'une autre fonction combinée avec une constante par addition, soustraction ou

(*) Il faudrait observer alors que la différence Δy est identiquement égale à $f(t + \Delta t, u, v) - f(t, u, v) + f(t + \Delta t, u + \Delta u, v) - f(t + \Delta t, u, v) + f(t + \Delta t, u + \Delta u, v + \Delta v) - f(t + \Delta t, u + \Delta u, v)$.

multiplication, la notion seule de la différentielle suffit pour indiquer le résultat. Ainsi

$$y = a + v \quad \text{donne} \quad dy = dv$$
$$y = a - v \qquad\qquad dy = -dv$$
$$y = av \qquad\qquad dy = adv.$$

n a déjà vu (n° 24) que

$$d(v^m) = mv^{m-1}.dv,$$

t une constante quelconque.

Lorsque la fonction est composée de plusieurs fonctions entre elles, multipliées ou divisées les unes par les e résultat se déduit de la règle des n°s 26 et 27. Désijours par t, u, v des fonctions de la variable indé- x,

$$u + v \quad \text{donne} \quad dy = du + dv$$
$$uv \qquad\qquad dy = vdu + udv$$
$$tuv \qquad\qquad dy = uvdt + tvdu + tudv$$
$$dy = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

expression s'obtient en observant que $d.\frac{1}{v} = -\frac{dv}{v^2}$.

it que la différentielle dy soit exprimée au différentielle dx de la variable indépen- placera dt, du et dv par $\frac{dt}{dx}dx$, $\frac{du}{dx}dx$, et

30. Nous considérerons maintenant les combinaisons les plus simples auxquelles donne lieu l'usage des fonctions logarithmiques, exponentielles et trigonométriques, que les géomètres appellent communément *fonctions transcendantes*.

La marche à suivre pour obtenir la différentielle consiste toujours à mettre la fonction proposée sous des formes semblables à celles des fonctions générales qui ont été considérées dans les nos 24 et suivants, c'est-à-dire à distinguer les quantités que l'on regardera comme fonctions les unes des autres, jusqu'à ce qu'on parvienne aux fonctions les plus simples. Soit

$$y = l(lx).$$

Cette formule revient à

$$y = lv, \quad \text{et l'on a} \quad v = lx.$$

Donc, d'après les nos 20 et 24,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}, \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x.lx} \quad \text{et} \quad dy = \frac{dx}{x.lx}.$$

31. Soit

$$y = a^{b^x},$$

qui revient à

$$y = a^v, \quad \text{en posant} \quad v = b^x.$$

D'après les nos 23 et 24, on aura donc

$$\frac{dy}{dx} = la.a^v, \qquad \frac{dv}{dx} = lb.b^x,$$

, et $dy = la.lb.a^{b^x}.b^x.dx.$

$y = u^v$,

ıx fonctions de la variable indépen-
la règle du nº 26, c'est-à-dire différen-
ɔar rapport à u seule et par rapport à v
vu^{v-1}, $\frac{dy}{dv} = lu.u^v$. Donc, en ajoutant

$= u^v \left(\frac{v}{u}\, du + lu.dv\right).$

$x + \frac{1}{2}\pi$), π désignant la demi-circon-
le rayon est 1 : en posant $v = x + \frac{1}{2}\pi$,

, $\frac{dy}{dv} = \cos.v$, $\frac{dv}{dx} = 1$,

$= -\sin.x$, et $dy = -\sin.xdx.$

π est égal à cos. x. Nous retombons
jà démontrée

$\cos.x = -\sin.xdx.$

ur

$= \frac{\sin.x}{\cos.x}$, $dy = \frac{dx}{\cos.^2x}$

$= \frac{\cos.x}{\sin.x}$ $dy = -\frac{dx}{\sin.^2x}$

$$y = \text{séc.}\, x = \frac{1}{\cos. x} \qquad dy = \frac{\sin. x. dx}{\cos.^2 x}$$

$$y = \text{coséc.}\, x = \frac{1}{\sin. x} \qquad dy = -\frac{\cos. x. dx}{\sin.^2 x}$$

34. En supposant

$$y = l \sin. x, \text{ on a } dy = \frac{d. \sin. x}{\sin. x} = \frac{\cos. x}{\sin. x}\, dx = \frac{dx}{\text{tang.}\, x}$$

$$y = l \cos. x, \qquad dy = \frac{d. \cos. x}{\cos. x} = -\frac{\sin. x}{\cos. x}\, dx = -\frac{dx}{\cot. x}.$$

35. Les géomètres appellent fonction inverse de la fonction $f(v)$ la fonction de u, que l'on obtient en résolvant par rapport à v l'équation $u = f(v)$. Ainsi la fonction arc. sin.x est inverse de la fonction sin.x. On obtient facilement la différentielle de la fonction inverse quand on connaît celle de la fonction. En effet, supposons

$$y = \text{arc. sin.}\, x,$$

et proposons-nous de trouver la différentielle dy. On a donc

$$x = \sin. y;$$

et prenant les coefficients différentiels de part et d'autre (*),

(*) Quand deux fonctions $f(x)$, $F(x)$, sont égales entre elles, soit pour toutes les valeurs de x, soit dans une certaine étendue des valeurs de cette variable, leurs dérivées (et par suite leurs différentielles) sont aussi égales entre elles dans cette même étendue, puisque des deux équations

$$f(x) = F(x), \qquad f(x + \Delta x) = F(x + \Delta x),$$

on tire

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

d'où résulte, en passant à la limite, $f'(x) = F'(x)$, C. Q. F. D. On aurait encore $f'(x) = F'(x)$, si la différence $f(x) - F(x)$, au lieu d'être nulle, était exprimée par une constante C.

e second nombre y comme une fonction
la règle du n° 24

$$1 = \cos. y \,.\, \frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\cos. y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

même manière sur les autres fonctions
ı trouve

$$\text{arc.tang.}x = \frac{dx}{1+x^2}, \quad d.\,\text{arc. séc.}x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$\text{arc.cot.}x = -\frac{dx}{1+x^2}, \quad d.\text{arc.coséc.}x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

es fonctions inverses pourrait servir aussi
·che de la différentielle de a^x à celle de
'équation $y = a^x$ on conclut $\log. y =$
·enant la différentielle des deux membres

$$\text{og.}a.dx, \quad \text{ou} \quad dy = \frac{\log. a}{\log. e} \,.\, a^x dx.$$

ıvoir présentes à la mémoire les expres-
ɜs très-simples que nous réunissons dans

$$= \cos.x.dx \qquad d.\,\text{arc. sin. } x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\sin.x.dx \qquad d.\text{arc.cos.}x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{dx}{\cos.^2 x} \qquad d.\text{arc.tang.}x = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$d.\sqrt{x}=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \qquad d.\cot.x=-\frac{dx}{\sin.^2x} \qquad d.\text{arc.cot.}x=-\frac{dx}{1+x^2}$$

$$d.\log.x=\log.e\frac{dx}{x} \qquad d.\text{séc.}\,x=\frac{\sin.x.dx}{\cos.^2x} \qquad d.\text{arc.séc.}x=\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$d.a^x=la.a^xdx \qquad d.\text{coséc.}x=-\frac{\cos.x.dx}{\text{séc.}^2x} \qquad d.\text{arc.coséc.}x=-\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Quant aux différentielles des fonctions plus composées, on doit les former d'après ce qui a été dit n° 30.

37. Soit par exemple

$$y=(ax^m+b)^n:$$

on décomposera cette fonction comme il suit :

$$y=u^n, \qquad u=av+b, \qquad v=x^m.$$

Appliquant les règles précédentes, il viendra

$$dy=nu^{n-1}du, \qquad du=adv, \qquad dv=mx^{m-1}dx;$$

et en substituant

$$du=a.mx^{m-1}dx$$
$$dy=n(ax^m+b)^{n-1}.amx^{m-1}dx.$$

Mais l'usage du calcul montrera bientôt qu'il est superflu de poser ces équations, et que l'on peut opérer immédiatement sur les quantités contenues dans la fonction proposée. Ainsi l'on différentiera d'abord par rapport à ax^m+b, ce qui donnera

$$dy=n(ax^m+b)^{n-1}.\,d(ax^m+b).$$

Puis pour former la différentielle $d\,(ax^m+b)$, on différentiera par rapport à x^m, ce qui donnera

$$d\,(ax^m+b)=a.d\,(x^m).$$

$x^m) = mx^{m-1}dx.$

ssive de ces valeurs conduit à celle

$$\text{sin.}\ \frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}.$$

règles énoncées, on doit donc écrire

$$\frac{ax}{u},\quad u=\sqrt{v},\quad v=1-a^2x^2,$$

onction proposée dans les fonctions
ntenues, fonctions dont on connaît
érentielles. On aurait ainsi

$$\frac{-ax.du}{u^2},\ du=\frac{dv}{2\sqrt{v}},\quad dv=-a^2.2xdx,$$

$$u=-\frac{a^2.xdx}{\sqrt{1-a^2x^2}},$$

$$t=\frac{adx}{(1-a^2x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}\cdot\frac{adx}{(1-a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

uations précédentes, on peut opérer
fonctions contenues dans la fonction
entiant par rapport à $\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}$,

on a

$$dy = \cos. \frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}} \cdot d\left(\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}\right).$$

Considérant ensuite $\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}$ comme une fraction de la forme $\frac{u}{v}$, on a

$$d\left(\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-a^2x^2}.adx - ax.d\sqrt{1-a^2x^2}}{1-a^2x^2}.$$

On remarque ensuite que

$$d\sqrt{1-a^2x^2} = \frac{d(1-a^2x^2)}{2\sqrt{1-a^2x^2}},$$

et enfin que

$$d(1-a^2x^2) = -a^2.\,2xdx.$$

Donc en substituant chaque expression dans l'expression précédente, il vient

$$d\sqrt{1-a^2x^2} = -\frac{a^2xdx}{\sqrt{1-a^2x^2}},$$

$$d\left(\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}\right) = \frac{adx}{(1-a^2x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dy = \cos. \frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}} \cdot \frac{adx}{(1-a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit encore

$$y = e^{nu^2.\text{tang}.\frac{u^2}{u^2+v^2}},$$

e désignant, comme on l'a indiqué n° 16, la base des logarithmes népériens, et u, v deux fonctions de la variable in-

entiant en premier lieu par rapport à

a

$$\text{ng.}\ \frac{u^2}{u^2+v^2}\,.\,d\left(au^2.\text{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2}\right).$$

$\frac{u^2}{u^2+v^2}$ étant différentié par rapport

^{2} et tang. $\frac{u^2}{u^2+v^2}$, il vient

$$= \text{tang.}\ \frac{u^2}{u^2+v^2}\,d(au^2) + au^2.d\,\text{tang.}\ \frac{u^2}{u^2+v^2}.$$

$$\text{et}\quad d\,\text{tang.}\ \frac{u^2}{u^2+v^2} = \frac{d\,\dfrac{u^2}{u^2+v^2}}{\cos.^2\dfrac{u^2}{u^2+v^2}}\ ;$$

$$\frac{(u^2+v^2).2udu - u^2.d(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2};$$

$$u^2+v^2) = 2(udu+vdv).$$

résultat dans l'expression précédente, il

$$\frac{u^2}{+v^2} = \frac{2uv(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2},$$

$$\frac{u^2}{+v^2} = \frac{2uv(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2.\cos.^2\dfrac{u^2}{u^2+v^2}},$$

$$d\left(au^2.\text{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2}\right)=2a\left(\text{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2}.udu+\frac{u^3v(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2.\cos.^2\frac{u^2}{u^2+v^2}}\right),$$

$$dy=e^{au^2.\text{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2}}.2a\left(\text{tang.}\frac{u^2}{u^2+v^2}.udu+\frac{u^3v(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2.\cos.\frac{u^2}{u^2+v^2}}\right).$$

Afin que la différentielle demandée dy soit exprimée au moyen de la différentielle dx de la variable indépendante, on mettra ensuite à la place de du sa valeur $\frac{du}{dx}dx$, et à la place de dv sa valeur $\frac{dv}{dx}dx$.

Les exemples précédents suffisent pour faire connaître la marche de l'opération dont il s'agit, opération qu'un fréquent usage rend très-facile.

IV. DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

38. Nous concevons, en revenant aux notions présentées dans le n° 2, qu'il existe une seule équation entre plusieurs variables. Toutes les valeurs de ces variables sont alors arbitraires, à l'exception d'une seule. La variable dont on suppose la valeur déterminée par l'équation, après que l'on s'est donné arbitrairement les valeurs de toutes les autres, est fonction de ces dernières, qui sont les variables indépendantes. Cette relation s'exprime en écrivant

$$z=f(u,v,x,y,\ldots),$$

u, v, x, y,... désignant les variables indépendantes, et z la

on des autres. On doit donc imaginer
riables u, v, x, y,... sont attribuées
prises entre $-\infty$ et $+\infty$, et se repré-
es valeurs correspondantes que prendra

ables indépendantes sont au nombre de
ue l'on a

$$z = f(x, y),$$

ncore le moyen de se représenter d'une
ccession des valeurs de la fonction z.
ace trois axes qui se croisent à angles
fig. 2. On regardera les variables indé-
me deux abscisses dont les valeurs ar-
en op et oq sur les premiers axes, et z
dont la valeur déterminée par la rela-
ortée en or sur le troisième axe. Les
ès à x et y déterminent un point m
xy, et en élevant au point m une per-
les xy, dont la longueur mM soit égale
oint M sera telle qu'il aurait respective-
; sur chacun des axes les points p, q, r,
nune intersection de trois plans, dont le
ar le point p parallèlement au plan des
oint q parallèlement au plan des xz, le
r parallèlement au plan des xy. En at-
; les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à
ndra toutes les positions possibles dans
xy. Les valeurs de z détermineront les
ntes du point M, et l'ensemble de ces
surface dont la figure fera juger de la

nature de la fonction $z = f(x, y)$, et de la marche progressive de ses valeurs.

Lorsque le nombre des variables indépendantes surpasse 2, il n'est plus possible de trouver ainsi dans la géométrie une image sensible de la nature et des propriétés de la fonction. Diverses recherches de physique donnent lieu à considérer trois et même quatre variables indépendantes ; mais, lorsque le nombre de ces variables est plus considérable, les questions n'appartiennent plus qu'à l'analyse, dont rien ne restreint la généralité, et qui embrasse toutes les combinaisons auxquelles peut donner lieu la considération des grandeurs.

40. La différentiation des fonctions de plusieurs variables indépendantes dépend des mêmes notions qui ont été présentées dans les articles précédents. Chaque variable indépendante u, v, x, y,... est supposée croître progressivement par différences infiniment petites du, dv, dx, dy,... dont chacune conserve une valeur constante, mais qui n'ont entre elles aucuns rapports déterminés. La variable z varie en conséquence de la quantité infiniment petite dz, dont la valeur s'obtient toujours par la considération de la limite du rapport des accroissements de la fonction et de chaque variable indépendante. Soit la fonction

$$z = f(x, y).$$

En supposant que x et y croissent respectivement des quantités quelconques Δx et Δy, la variation correspondante Δz de la fonction pourra se décomposer en deux parties, l'une provenant de la variation de x seule, l'autre de la variation de y ; en effet on peut écrire

$$\Delta z = \{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)\} + \{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)\},$$

ne,

$$\Delta x + \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} \Delta y.$$

que les différences Δx et Δy s'appro-
zéro, le rapport $\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$
ormément à ce qu'on a vu dans l'ar-
rapport $\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y}$
rès le même raisonnement qui a été
$\frac{x, y)}{y}$. L'expression de la différentielle

$$\frac{(x, y)}{dy} dx + \frac{d.f(x, y)}{dy} dy,$$

ısi :

$$= \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

ɔposée contenait trois ou un plus grand
on lui appliquerait les mêmes considé-
posant

$$z = f(v, x, y),$$

$$v + \frac{d.f(v, x, y)}{dx} dx + \frac{d.f(v, x, y)}{dy} dy,$$

anière plus simple

$$\frac{dz}{dv} dv + \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

Et ainsi de suite s'il y avait un plus grand nombre de variables.

Remarquons que, dans cette formule, le terme $\frac{dz}{dv}\,dv$ représente la différentielle de la fonction proposée que l'on trouverait en regardant v comme seule variable; c'est ce que l'on nomme la *différentielle partielle* de la fonction z prise par rapport à v. De même les termes $\frac{dz}{dx}\,dx$ et $\frac{dz}{dy}\,dy$ représentent les différentielles partielles de la fonction z prises respectivement par rapport à x et à y. La somme de ces différentielles partielles forme la *différentielle totale* dz. Les fractions $\frac{dz}{dv}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ sont ici des signes analytiques qui représentent respectivement les coefficients différentiels de la fonction z pris en regardant v seule comme variable, x seule comme variable, y seule comme variable. Le dz qui est au numérateur représente la différentielle partielle de z prise par rapport à v, à x ou à y, et ne doit pas être confondu avec le dz qui est dans le premier membre de l'équation, et qui représente la différentielle totale de la fonction z.

Remarquons que, d'après l'indépendance des valeurs des variables v, x, y, rien n'oblige à supposer qu'elles varient toutes à la fois. Ainsi celui qui demande la différentielle de la fonction $z = f(v, x, y,)$ indiquera si cette différentielle doit être *totale*, auquel cas elle est exprimée généralement par la formule précédente, ou bien si elle doit être prise par rapport à une, ou à quelques-unes seulement des variables. On supprimerait alors, dans la formule dont il s'agit, les termes relatifs aux variables qui seraient censées ne point subir d'accroissements.

42. La différentiation des fonctions de plusieurs variables

ıenée, d'après ce qui précède, à
ır rapport à une des variables seule,
:ulté, dans chaque cas particulier,
l'article précédent.

on proposée ne contient que deux
, comme

$$z = f(x, y),$$

a différentielle totale

$$\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$$

la géométrie, conformément à ce
m (fig. 3) le point du plan des xy,
op, oq représentent x et y, et M le
jeté en m, dont l'ordonnée or repré-
onction z. Les accroissements Δx et
par $m\mu'$ et $m\mu''$. Soit $m'n'$ la projec-
de la courbe d'intersection de la sur-
par le point M parallèlement au plan
$m''n''$ la projection sur le plan des yz
:tion de la surface par un plan mené
:lement au plan des yz. Il est visible
variation que subirait l'ordonnée z, si
sait de Δx ou $m\mu'$; et que $n''r''$ repré-
subirait cette même ordonnée si l'ab-
de Δy ou $m\mu''$. La variation totale de
lire celle qui résulte de l'accroissement
bscisses, est représentée par la diffé-
e du point M de la surface qui se pro-
ée du point de cette même surface qui

se projette en n. Lorsque les accroissements sont supposés infiniment petits, $n'r'$ exprime la partie $\frac{dz}{dx}\,dx$ de la différentielle totale, et le coefficient différentiel $\frac{dz}{dx}$ pris par rapport à x est représenté par la tangente trigonométrique de l'angle $n'm'r'$. De même $n''r''$ représente la partie $\frac{dz}{dy}\,dy$ de la différentielle totale, et le coefficient différentiel $\frac{dz}{dy}$ pris par rapport à y est représenté par la tangente trigonométrique de l'angle $n''m''r''$. On voit que, dans le cas des accroissements infiniment petits, la variation de l'ordonnée z, lorsqu'on passe du point de la surface projeté en m au point projeté en n, est toujours la somme des variations qui ont lieu respectivement quand on passe du point projeté en m aux deux points projetés en μ' et μ''. On reviendra dans la suite sur ces considérations, auxquelles il sera donné un plus grand développement.

V. DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS IMPLICITES.

44. Une fonction est appelée *explicite* lorsque son expression analytique est donnée au moyen des quantités constantes et variables dont dépend sa valeur. Ainsi l'on dit que la fonction z des deux variables x, y est explicite, ou que cette fonction est donnée *explicitement*, si l'on a l'équation

$$z = f(x, y),$$

Mais si la fonction z est engagée avec les variables x, y dans

, y, z) = 0,

rapport à z, cette fonction est
l'on dit que sa valeur est donnée
ar cette expression que la valeur
léterminée quand on a fixé celle
oint représentée par une expres-
es variables. On peut différentier
si facilement que les autres, c'est-
de la différentielle de la fonction
ans laquelle elle est engagée.
ui ont été présentées dans le n° 2.
on détermine toujours le nombre
ue les relations qui existent entre
s par des équations. Le nombre des
mbre des équations étant n, $m-n$
dantes ; les n autres variables sont
n a distingué celles des variables
: indépendantes, et celles qui en
e distinction subsiste dans tout le
ucun changement.
d'abord le cas simple d'une seule
et de la fonction y, entre lesquelles

$^{r}(x, y) = 0.$

subsister, quelle que soit la valeur
idemment

$\Delta x, y + \Delta y) = 0,$

: Δy la variation de la fonction y,

correspondant à l'accroissement Δx attribué à x. On aura donc aussi

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta x}=0,$$

équation qui subsistera, quelle que soit Δx, et, par conséquent, qui aura lieu pour la limite vers laquelle tend le premier membre, lorsque Δx tend à devenir égale à zéro. Or, cette limite n'est autre chose que le coefficient différentiel $\frac{d.f(x,y)}{dx}$ du premier membre de l'équation proposée, dont l'expression est ici, d'après le n° 26 et en remarquant que y est fonction de la variable indépendante x, $\frac{d.f(x,y)}{dx}+\frac{d.f(x,y)}{dy}.\frac{dy}{dx}$.

On a donc l'équation

$$\frac{d.f(x,y)}{dx}+\frac{d.f(x,y)}{dy}\,\frac{dy}{dx}=0,$$

que l'on écrit souvent pour abréger

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx}=0,$$

en indiquant seulement par la lettre f la fonction proposée $f(x,y)$, et dont on déduit

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

pour l'expression du coefficient différentiel ou de la fonction dérivée de y.

Nous remarquerons d'ailleurs que ce coefficient diffé-

é au moyen des deux variables

'est autre chose que la différen-

on a supprimé le facteur constant
égale à zéro, et il est évident, en
$=0$ devant subsister pour une va-
pression d'une variation finie ou
la fonction $f(x,y)$, par l'effet d'un
ment petit attribué à x, doit être
on $f=0$, f désignant une fonction
riables, entraîne toujours l'équa-
par df la différientielle de la fonc-
ou partielle.

iant le cas général où l'on aurait
usieurs variables indépendantes·
eux équations

$x, y, z) = 0$
$x, y, z) = 0$,

ent des variables indépendantes,
et x, données implicitement par
tielles des deux fonctions f et F
ce qui vient d'être dit, on aura en
aux règles exposées dans les ar-
pelant que y et z sont fonctions de

$$v + \left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}\right)dx = 0$$
$$v + \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}\right)dx = 0.$$

Dans chacune de ces équations, l'on peut supposer séparément $dv=0$, ou $dx=0$. Elles équivalent donc à quatre équations distinctes qui déterminent les valeurs des quatre coefficients différentiels partiels $\frac{dy}{dv}, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dv}, \frac{dz}{dx}$. Ces coefficients différentiels se trouvent exprimés au moyen des quatre variables v, x, y, z.

Les valeurs des coefficients différentiels partiels des fonctions y et z étant ainsi obtenues, on formera les différentielles totales de ces fonctions, en substituant les valeurs dont il s'agit dans les expressions générales

$$dy=\frac{dy}{dv}dv+\frac{dy}{dx}dx, \qquad dz=\frac{dz}{dv}dv+\frac{dz}{dx}dx.$$

Ces considérations s'étendront facilement au cas où il y aurait un plus grand nombre de variables et d'équations.

VI. DIFFÉRENTIELLES DES DIVERS ORDRES POUR LES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

46. Nous considérons en premier lieu une seule variable indépendante x et la fonction y dépendante de cette variable, en écrivant toujours

$$y=f(x);$$

et pour rendre les notions plus sensibles nous supposons que l'on ait sous les yeux la représentation géométrique de la fonction, conformément à ce qui a été dit n° 5. L'abscisse OP, *fig.* 4, représente x, et l'ordonnée PM représente y.

Cela posé, admettons que x croisse de la quantité quel-

par PP'. La nouvelle valeur de y, que y_1, sera représentée par PM', et M'Q

$$\Delta y = y_1 - y.$$

e x croisse encore à partir de la va-
antité Δx, qui sera représentée par
e valeur de y, que nous désigne-
sentée par P''M'', et M''Q' représen-

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1.$$

on prolonge la sécante MM' jusqu'en
égal à M'Q ou Δy. Donc M''S repré-
y_1 et Δy. Comme on a représenté par
x valeurs de y qui répondent à x et
ait à représenter par $\Delta\Delta y$ ou par $\Delta^2 y$ la
rs de Δy qui répondent à x et $x + \Delta x$.

$$^2y = \Delta y_1 - \Delta y.$$

plus nette des quantités que nous
ant le tableau suivant :

ntes	DIFFÉRENCES de ces valeurs.	DIFFÉRENCES des différences.
	$\Delta y = y_1 - y$ $\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y$

Nous ajouterons que les géomètres nomment Δy la *différence première* ou la *différence du premier ordre* de la fonction y; et $\Delta^2 y$ la *différence seconde* ou la *différence du second ordre* de cette même fonction.

47. Admettons maintenant que la différence Δx de la variable indépendante diminue progressivement, et tende à devenir égale à zéro. Les deux points M′, M″ tendront à se confondre avec le point M; les deux valeurs y_1 et y_2 à devenir égales à y; et les trois différences Δy, Δy_1, et $\Delta^2 y$ à devenir en même temps égales à zéro. Mais il est bien important de remarquer que la différence seconde $\Delta^2 y$ diminuera beaucoup plus rapidement que les différences premières Δy et Δy_1; en sorte que Δx, Δy et Δy_1 étant devenues très-petites par rapport à l'unité, $\Delta^2 y$ sera devenue très-petite par rapport à Δx, Δy ou Δy_1.

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que l'expression de $\Delta^2 y$ peut s'écrire ainsi

$$\Delta^2 y = \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \Delta x.$$

Or, en supposant que Δx décroisse et tende à devenir nulle, les quantités $\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ s'approcheront toutes deux de la même limite, qui est $\frac{dy}{dx}$. Donc, la valeur de $\Delta^2 y$, formée de deux facteurs qui ont pour limite commune 0, diminuera beaucoup plus rapidement que l'un de ces facteurs, et quand tous deux seront très-petits, sera elle-même très-petite par rapport à l'un ou à l'autre.

48. La même expression de $\Delta^2 y$ peut aussi s'écrire

$$\Delta^2 y = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x} (\Delta x)^2.$$

n s'approchant de zéro et devient plus
leur donnée, ce que nous exprimons
différence par dx, chacune des quantités

e le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$; et le rap-

limite le coefficient différentiel de la

ire $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$. Ainsi, en représentant par

y lorsque Δx devient dx, on a

$$d^2y = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}(dx)^2.$$

érentielle du second ordre de la fonction
ns d'ailleurs que l'on est dans l'usage
Δx^2 ou dx^2 pour exprimer le carré de Δx
oint à craindre que l'expression dx^2 soit
fférentielle de la fonction x^2, qui serait
^{2}), ou par $d.x^2$.

le *coefficient différentiel du premier ordre*
$\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$ est le *coefficient différentiel du se-*
même fonction. L'analogie conduit à le
manière plus simple en écrivant $\frac{d^2y}{dx^2}$.
e du second ordre est exprimée par

$$d^2y = \frac{d^2y}{dx^2}dx^2,$$

c'est-à-dire qu'elle est égale au produit du carré de dx par le coefficient différentiel du second ordre de la fonction proposée ; ou par la fonction que l'on trouverait en prenant, conformément aux règles de l'article III, le coefficient différentiel de y, puis le coeffficient différentiel de celui-ci.

Lorsqu'on exprime d'après Lagrange le coefficient différentiel ou la fonction dérivée du premier ordre par y' ou par $f'(x)$, on exprime de même le coefficient différentiel ou la fonction dérivée du second ordre par y'' ou par $f''(x)$.

49. Il est évident, d'après ce qui précède, que l'on obtiendra la différentielle du second ordre de la fonction proposée en différentiant deux fois de suite cette fonction, la différentielle dx étant regardée dans la seconde différentiation comme un facteur constant.

50. Nous pouvons supposer le tableau du n° 46 continué en considérant quatre valeurs consécutives de x séparées par l'intervalle constant Δx, ce qui donnera

VALEURS de x	VALEURS correspondantes de y.	DIFFÉRENCES premières.	DIFFÉRENCES secondes.	DIFFÉRENCES troisièmes.
x	y			
$x+\Delta x$	y_1	$\Delta y = y_1 - y$		
$x+2\Delta x$	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y$	
$x+3\Delta x$	y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y$

On remarquera également que quand Δx tend à devenir nulle, les valeurs de y_1, y_2, y_3 tendent à devenir égales à y, et que les différences premières, secondes et troisièmes ten-

·enir nulles. Mais de même que $\Delta^2 y$
s rapidement que Δy, il est facile de
eaucoup plus rapidement que $\Delta^2 y$. En
$^3 y$ peut s'écrire

$$= \left(\frac{\Delta^2 y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)\Delta x^3$$

$$\frac{y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}\Big)\Delta x^2.$$

ıd à devenir égal à zéro les deux termes

'approchent tous deux d'une même li-

ıc la valeur de $\Delta^3 y$ est formée de trois

limite commune 0, et par conséquent
ıs rapidement que $\Delta^2 y$, qui est seule-
x facteurs ayant 0 pour limite. Ainsi,
ıetite par rapport à l'unité, $\Delta^2 y$ sera
rt à Δy, et $\Delta^3 y$ très-petite par rapport

lleurs $\Delta^3 y$ sous la forme

$$\frac{\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}}{\Delta x}\Delta x^3,$$

uant et devenant plus petite que toute
acune des quantités $\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2}$ et $\frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}$
icient différentiel du second ordre $\frac{d^2 y}{dx^2}$;

et que le rapport $\dfrac{\dfrac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \dfrac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}}{\Delta x}$ a pour limite le coefficient différentiel de la fonction $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, c'est-à-dire $\dfrac{d\,\dfrac{d^2y}{dx^2}}{dx}$. On a donc, en représentant par d^3y, ce que devient Δ^3y, lorsque Δx devient dx,

$$d^3y = \frac{d\,\dfrac{d^2y}{dx^2}}{dx}\,dx^3,$$

expression qui s'écrit d'une manière plus simple

$$d^3y = \frac{d^3y}{dx^3}\,dx^3.$$

d^3y est la *différentielle du troisième ordre* de la fonction proposée y, et la fonction $\dfrac{d\,\dfrac{d^2y}{dx^2}}{dx}$ ou $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ est le *coefficient différentiel du troisième ordre* de cette même fonction. La différentielle du troisième ordre est égale au produit du cube de dx par le coefficient différentiel du troisième ordre.

Le coefficient différentiel du troisième ordre s'exprime également par y''' ou par $f'''(x)$.

52. On obtiendra évidemment la différentielle du troisième ordre d'une fonction proposée en différentiant trois fois de suite cette fonction, la différentielle dx étant regardée dans la seconde et dans la troisième différentiation comme un facteur constant.

53. Si l'on considérait cinq valeurs consécutives de la variable indépendante, et les cinq valeurs correspondantes de

rouverait conduit à la différence du
lont l'expression serait composée de
ıs tendraient à devenir nuls lorsque
à devenir nulle. Cette différence qua-
ıc, lorsque Δx approcherait de zéro,
ıent que la différence troisième, qui
trois facteurs ayant zéro pour limite.
: que devient $\Delta^4 y$ lorsque Δx prend la
désignée par dx, on aurait

$$d^4y = \frac{d^4y}{dx^4}\,dx^4,$$

fficient différentiel du quatrième ordre

, c'est-à-dire le résultat que l'on ob-
ıatre fois de suite cette fonction, dx
: un facteur constant, puis divisant

considérant un plus grand nombre de
ces d'un ordre plus élevé.
ıi précède qu'une fonction quelconque
ırdée comme donnant naissance à une
entielles représentées par

$$y = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2,\quad d^3y = \frac{d^3y}{dx^3}\,dx^3,\ \text{etc.}$$

fonction même et les unes des autres
ıs avons appelée différentiation. L'ex-
ıtielles met d'ailleurs en évidence la
valeurs, puisque les coefficients diffé-
etc., qui sont des fonctions finies de la

variable x, s'y trouvent multipliés par des puissances de plus en plus élevées de la quantité infiniment petite dx. Cette subordination existe, bien que toutes les différentielles dy, d^2y, d^3y, etc., soient également regardées comme des quantités qui diffèrent de zéro moins que toute grandeur donnée. En effet, la supposition que dx diffère de zéro moins que toute grandeur donnée, ou que dx est infiniment petite, entraîne celle que les rapports de d^2y à dy, de d^3y à d^2y, etc., diffèrent aussi de zéro moins que toute grandeur donnée; c'est ce que l'on exprime en disant que ces quantités sont infiniment petites les unes par rapport aux autres, ou qu'elles forment une suite d'infiniment petits d'un ordre de plus en plus élevé.

55. Nous remarquerons qu'en supposant la fonction $y=f(x)$ représentée par l'ordonnée d'une courbe dont x est l'abscisse, la direction de la courbe et le côté de la figure vers lequel elle présente sa convexité sont déterminés, dans une étendue fort petite de part et d'autre du point m, par le signe seul des deux différentielles du premier et du second ordre dy et d^2y, c'est-à-dire par le signe seul des coefficients différentiels ou fonctions dérivées du premier et du second ordre $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Les diverses combinaisons qui peuvent exister à cet égard sont indiquées dans les figures 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.

Fig. 5 et *fig.* 6, les coefficients différentiels sont positifs; *fig.* 7 et *fig.* 8, $\frac{dy}{dx}$ est négatif et $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif; *fig.* 9 et *fig.* 10, $\frac{dy}{dx}$ est positif et $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif; *fig.* 11 et *fig* 12, les deux coefficients différentiels sont négatifs. On voit que $\frac{d^2y}{dx^2}$

be présente sa convexité au bas de la
la courbe présente sa concavité au
ose ici, suivant l'usage ordinaire, les
s en haut.

ivers ordres des fonctions simples.

ıs les notions précédentes aux fonc-
ı différentiation est l'objet de l'ar-

ı premier lieu, la fonction x^m,

$^{m-1}$,

$n-1)x^{m-2}$,

$n-1)(m-2)x^{m-3}$,

$n-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}$,

ıts différentiels se prolongera à l'in-
t négatif, ou si, étant positif, il est
ent fractionnaire. Mais si m est un
on a

$-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots 3.2.1.$

ıt réduite à une constante, les coeffi-
vants sont alors nuls.

. x, le logarithme étant pris dans un

système quelconque, ou dans le système des logarithmes népériens, donne

$$\frac{d.\log.x}{dx}=\frac{\log.e}{x}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d.lx}{dx}=\frac{1}{x},$$

$$\frac{d^2.\log.x}{dx^2}=-\frac{\log.e}{x^2}, \qquad \frac{d^2.lx}{dx^2}=-\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{d^3.\log.x}{dx^3}=\frac{2.\log.e}{x^3}, \qquad \frac{d^3.lx}{dx^3}=\frac{2}{x^3},$$

$$\frac{d^4.\log.x}{dx^4}=-\frac{2.3.\log.e}{x^4}, \qquad \frac{d^4.lx}{dx^4}=-\frac{2.3}{x^4},$$

$$\frac{d^5.\log.x}{dx^5}=\frac{2.3.4.\log.e}{x^5}, \qquad \frac{d.^5lx}{dx^5}=\frac{2.3.4}{x^5},$$

Etc. Etc.

58. Les fonctions a^x et a^{-x} donnent

$$\frac{d.a^x}{dx}=la.a^x, \qquad \frac{d.a^{-x}}{dx}=-la.a^{-x},$$

$$\frac{d^2.a^x}{dx^2}=(la)^2.a^x, \qquad \frac{d^2.a^{-x}}{dx^2}=(la)^2.a^{-x},$$

$$\frac{d^3.a^x}{dx^3}=(la)^3.a^x, \qquad \frac{d^3.a^{-x}}{dx^3}=-(la)^3.a^{-x},$$

Etc. Etc.

Et si le nombre a devient e, ou la base des logarithmes népériens, on a

$$\frac{d.e^x}{dx}=e^x, \qquad \frac{d.e^{-x}}{dx}=-e^{-x},$$

$$\frac{d^2.e^x}{dx^2}=e^x, \qquad \frac{d^2.e^{-x}}{dx^2}=e^{-x},$$

$$\frac{d^3.e^x}{dx^3}=e^x, \qquad \frac{d^3.e^{-x}}{dx^3}=-e^{-x},$$

Etc. Etc.

La différentiation, comme on l'a déjà remarqué n° 22, reproduit constamment la fonction e^x, et plus généralement

présente cette propriété. Lorsque
affecté du signe —, la fonction pri-
produite, mais les coefficients diffé-
ent négatifs et positifs.

fonctions trigonométriques sin. x et

$$\frac{\pi}{2}\Big), \quad \frac{d.\cos.x}{dx} = -\sin.x = \cos.\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$+\pi), \quad \frac{d^2.\cos.x}{dx^2} = -\cos.x = \cos.(x+\pi),$$

$$\frac{3\pi}{2}\Big), \quad \frac{d^3.\cos.x}{dx^3} = \sin.x = \cos.\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$2\pi), \quad \frac{d^4.\cos.x}{dx^4} = \cos.x = \cos.(x+2\pi),$$

$$\frac{5\pi}{2}\Big), \quad \frac{d^5.\cos.x}{dx^5} = -\sin.x = \cos.\left(x+\frac{5\pi}{2}\right),$$

Etc.

reviennent, après deux différentia-
e —. Après quatre différentiations,
r signe.

entes à l'esprit ces propriétés remar-
it utile de connaître la figure des
les fonctions simples dont il s'agit :
courbes l'expression des coefficients
emiers ordres donne de grandes faci-
e qui a été dit n° 55.

$$y = x^m,$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}.$$

La courbe, dont x est l'abscisse et y l'ordonnée, présentera diverses figures, suivant la nature de l'exposant m. Nous supposerons d'abord cet exposant positif et plus grand que l'unité.

1° Si m est un nombre entier pair, y est positive quel que soit le signe de x, $\frac{dy}{dx}$ change de signe avec x, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est toujours positif. La courbe est représentée par la *fig.* 13.

2° Si m est un nombre entier impair, y change de signe avec x, $\frac{dy}{dx}$ est constamment positif, $\frac{d^2y}{dx^2}$ change de signe avec x. La courbe est représentée par la *fig.* 14.

3° Si m est un nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$, p et q étant entiers, la courbe est représentée par la *fig.* 13 lorsque p est pair et q impair, et par la *fig.* 14 lorsque p est impair et q impair. Mais si q est pair, la partie située du côté des x négatives n'existe pas, les valeurs de y correspondantes aux valeurs négatives de x étant alors imaginaires.

61. En supposant, en second lieu, l'exposant m positif et plus petit que l'unité, ce cas différera du précédent, en ce que $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera négatif lorsque dans le cas précédent il était positif, et positif quand il était négatif. La *fig.* 13 sera remplacée par la *fig.* 15, et la *fig.* 14 par la *fig.* 16.

62. En admettant maintenant que l'exposant m soit négatif, c'est-à-dire que l'on ait

$$y = \frac{1}{x^m},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{x^{m+1}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m(m+1)}{x^{m+2}},$$

sitif, on passera facilement des cas
épondent à cette dernière supposition,
es ordonnées des courbes que repré-
, 15 et 16. Les *fig.* 13 et 15 seront
7, et les *fig.* 14 et 16 par la *fig.* 18.
s asymptotes aux branches de la

logarithmique, nous avons

$$y = \log. x,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log. e}{x},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\log. e}{x^2}.$$

axe des y pour asymptote du côté des
oA du point où elle coupe l'axe des x
y a point de branche de la courbe du

nentielle a^x donne

$$y = a^x,$$
$$\frac{dy}{dx} = la.a^x,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = (la)^2.a^x.$$

tif et plus grand que l'unité, la valeur
définiment du côté des x positives;
a l'axe des x pour asymptote du côté
nnée oB, du point où elle coupe l'axe
té.

positif et plus petit que l'unité, la
rait alors en $\left(\frac{1}{a}\right)^x$, ou a^{-x}, a étant

supposé comme ci-dessus plus grand que l'unité. Ainsi, ce cas revient au précédent en changeant les x positives pour les x négatives, et réciproquement.

Comme l'équation $y = a^x$ entraîne d'ailleurs $x = \log. y$, a étant pris pour la base du système de logarithmes, il est visible que la courbe dont il s'agit ne diffère point de celle du numéro précédent, lorsqu'on change l'un pour l'autre les axes des x et des y.

Si l'on voulait prendre pour a dans la fonction a^x un nombre négatif, cette fonction cesserait de présenter des valeurs continues : il n'existerait plus de courbe, mais seulement des points isolés correspondants aux valeurs de x égales à des nombres entiers ou à des fractions de dénominateur impair. Nous supposerons toujours, dans la suite, par cette raison, quand il s'agira d'un système quelconque de logarithmes, que la base a de ce système est un nombre positif et plus grand que l'unité.

65. Soit encore la fonction $y = e^{-x^2}$ qui se présente dans plusieurs applications importantes. Elle donne

$$y = e^{-x^2},$$
$$\frac{dy}{dx} = -2x.e^{-x^2},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

La courbe (*fig.* 21) est formée de deux branches égales situées de part et d'autre de l'axe des y. L'ordonnée oB du point où elle coupe cet axe est égale à l'unité.

Le coefficient du premier ordre $\frac{dy}{dx}$ change de signe avec l'abscisse x. Le coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$

est plus petite que la distance
ue x dépasse cette distance. Ainsi la

vité au bas de la page dans l'inter-
cet intervalle elle y présente sa con-
s lesquels la valeur du coefficient dif-

signe, et pour lesquels la valeur
tiel est nulle, sont nommés *points*

in les fonctions trigonométriques.

$y = \sin. x$,

$\frac{y}{r} = \cos. x$,

$\frac{y}{r^2} = -\sin. x$.

pe l'axe des x aux points où l'abscisse
, 2π, 3π, etc. Dans ces points, la
s axes un angle égal à la moitié de
l'on a $\frac{dy}{dx} = \pm 1$. Les plus grandes
eur est l'unité, répondent aux points
gale aux arcs $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, etc. Le signe
el du second ordre étant contraire à
courbe présente sa convexité au bas
onnée est positive, et réciproquement.
ée est nulle sont les points d'inflexion.
nge indéfiniment, soit du côté des x
des x négatives, en présentant une

suite de parties identiquement égales à celles qui sont comprises dans l'intervalle de 0 à 2π. C'est ce qu'on exprime en disant que la fonction est *périodique*.

67. On a également

$$y = \cos. x,$$
$$\frac{dy}{dx} = -\sin. x,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos. x.$$

Il est assez visible que la figure de la courbe est parfaitement égale à la précédente, dans laquelle on aurait déplacé l'origine des abscisses x de l'intervalle $\frac{\pi}{2}$, puisque l'on a toujours

$$\cos. x = \sin. \left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

VII. DIFFÉRENTIELLES DES DIVERS ORDRES POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

68. La notion des différentielles des ordres supérieurs s'étend facilement aux fonctions de plusieurs variables, puisque la différentiation de ces fonctions s'effectue toujours en opérant séparément par rapport à chacune des variables.

Soit en premier lieu, comme dans le n° 40, la fonction

$$z = f(x, y),$$

x et y étant deux variables indépendantes. On a vu que l'on obtenait pour cette fonction la différentielle du premier ordre *totale* exprimée par

$$= \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

e des *différences partielles* $\frac{dz}{dx}dx$, et

ement en regardant x seule comme

ne variable. Les fonctions désignées par

cients différentiels partiels du premier

ris respectivement par rapport à x et

érentiation peut également s'appliquer

dans laquelle on regardera dx et dy

nstants. Si l'on veut former la dif-

udra différentier successivement les

rapport à x et par rapport à y. On aura

elle totale du second ordre

$$\left.\frac{dz}{dx}dy\right)dx + \left(\frac{d\frac{dz}{dy}}{dx}dx + \frac{d\frac{dz}{dy}}{dy}dy\right)dy.$$

représenté dans l'article précédent le

$\frac{d\frac{dz}{dx}}{dx}$ par $\frac{d^2z}{dx^2}$: l'analogie conduit à re

$\frac{dz}{dx}$ par $\frac{d^2z}{dxdy}$. On écrit également $\frac{d^2z}{dydx}$

au lieu de $\frac{d\frac{dz}{dy}}{dy}$. Ainsi l'expression pré-

dente devient

$$d^2z = \left(\frac{d^2z}{dx^2}dx + \frac{d^2z}{dxdy}dy\right)dx + \left(\frac{d^2z}{dydx}dx + \frac{d^2z}{dy^2}dy\right)dy,$$

ou si l'on veut

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + \left(\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d^2z}{dydx}\right)dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2.$$

Dans cette expression de la différentielle seconde totale de la fonction z, le signe $\frac{d^2z}{dx^2}$ représente le coefficient différentiel du second ordre de la fonction proposée, pris en regardant x seule comme variable. Le signe $\frac{d^2z}{dxdy}$ exprime que l'on a pris le coefficient différentiel du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ en regardant x seule comme variable, puis le coefficient différentiel de cette fonction $\frac{dz}{dx}$ en regardant y seule comme variable. Le signe $\frac{d^2z}{dydx}$ exprime que l'on a pris le coefficient différentiel du premier ordre $\frac{dz}{dy}$ en regardant y seule comme variable, puis le coefficient différentiel de cette fonction $\frac{dz}{dy}$ en regardant x seule comme variable. Enfin $\frac{d^2z}{dy^2}$ représente le coefficient différentiel du second ordre de la fonction z pris en regardant y seule comme variable.

69. Nous remarquerons maintenant que les deux coefficients différentiels $\frac{d^2z}{dxdy}$ et $\frac{d^2z}{dydx}$ sont nécessairement égaux. En effet,

ions présentées dans les nos 46 et sui-
$\frac{dz}{dx}$ est la limite vers laquelle tend

$$\frac{x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x},$$

evenir nulle. De même $\frac{d^2z}{dxdy}$ est la
d

$$\frac{\frac{)-f(x, y+\Delta y)}{x} - \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}}{\Delta y},$$

nt à devenir nulles. On reconnaît de
ıite vers laquelle tend

$$\frac{(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y},$$

nir nulle, et que $\frac{d^2z}{dydx}$ est la limite

$$\frac{\frac{)-f(x+\Delta x, y)}{x} - \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}}{\Delta y},$$

nt à devenir nulles. Or, cette dernière
point de la précédente, leurs limites
elles. Donc $\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^2z}{dxdy}$. Ainsi, le
du second ordre pris par rapport aux
est identiquement le même, soit que

l'on différentie en premier lieu par rapport à x ou par rapport à y. C'est ce qu'on exprime en disant que l'ordre des différentiations n'influe pas sur les résultats.

Il en résulte que l'expression de la différentielle du second ordre de la fonction proposée z, donnée dans le numéro précédent, doit s'écrire

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2.$$

70. L'opération de la différentiation peut également être appliquée à cette expression, et pour avoir la différentielle totale du troisième ordre, il faudra différentier les fonctions $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}$ par rapport à x et par rapport à y. En ayant égard à la proposition démontrée dans le numéro précédent, il viendra

$$d^3z = \frac{d^3z}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3z}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3z}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3z}{dy^3}dy^3.$$

En continuant de la même manière, on trouvera en général

$$d^nz = \frac{d^nz}{dx^n}dx^n + n\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2 + \ldots\ldots + \frac{d^nz}{dy^n}dy^n,$$

expression dont l'analogie avec celle du développement de la puissance entière d'un binome est évidente. On pourrait écrire

$$d^nz = \left(\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\right)^n,$$

en se réservant de changer, après le développement, dz^n en d^nz.

y aurait plus de deux variables indépen-
; de nouvelles considérations. Soit par

$$z = f(v, x, y).$$

rentielle totale du premier ordre, d'a-

$$= \frac{dz}{dv}dv + \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy.$$

: expression, où dv, dx, dy doivent être
facteurs constants, et $\frac{dz}{dv}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ comme
ois variables indépendantes v, x, y, il
rentielle totale du second ordre

$$\frac{z}{y^2}dy^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dvdx}dvdx + \frac{d^2z}{dvdy}dvdy + \frac{d^2z}{dydx}dydx\right).$$

écrire

$$dv + \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\Big)^n,$$

hanger après le développement dz^n en

ne si le nombre des variables indépen-
sidérable.

VIII. DIFFÉRENTIELLES DES DIVERS ORDRES POUR LES FONCTIONS IMPLICITES.

72. Soit en premier lieu comme dans le n° 43, l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

dans laquelle x est la variable indépendante et y une fonction de x donnée implicitement par cette équation. La question consiste à trouver, sans résoudre l'équation, les expressions des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., de la fonction y. On a déjà vu dans le numéro cité, que l'on avait, par une différentiation, l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

Si l'on différentie une seconde fois, en se rappelant que les fonctions $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$ contiennent les deux variables x, y, et que y doit être regardée comme fonction de x, on trouvera l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

d'où l'on tire, après avoir mis pour $\frac{dy}{dx}$ la valeur précédente,

$$\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{df}{dx}\frac{df}{dy} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2}{\left(\frac{df}{dy}\right)^3}.$$

btiendrait également en différentiant la

la même manière pour former les coeffi-
es ordres supérieurs au second.

ɔtions conviennent aux cas où il y aurait
ɔre de variables et d'équations proposées.
ɔpliquer le procédé de la différentiation,
quations différentielles d'un ordre de plus
ont on pourra toujours déduire les ex-
ients différentiels des fonctions qui ne
'une manière implicite. Nous considére-
mple après le précédent. Soient les deux

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$F(x, y, z) = 0,$$

ɜt la variable indépendante, y et z deux
riable déterminées par ces équations. En
première fois, il viendra

$$\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$
$$\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

er ordre, d'où l'on déduira par l'élimi-

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}\frac{dF}{dz}-\frac{dF}{dx}\frac{df}{dz}}{\frac{df}{dy}\frac{dF}{dz}-\frac{dF}{dy}\frac{df}{dz}},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{df}{dx}\frac{dF}{dy}}{\frac{df}{dy}\frac{dF}{dz}-\frac{dF}{dy}\frac{df}{dz}}.$$

En différentiant les équations précédentes, on trouvera ensuite

$$\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{dy}{dx}+2\frac{d^2f}{dxdz}\frac{dz}{dx}+\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{d^2f}{dydz}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+$$
$$+\frac{d^2f}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{df}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$
$$\frac{d^2F}{dx^2}+2\frac{d^2F}{dxdy}\frac{dy}{dx}+2\frac{d^2F}{dxdz}\frac{dz}{dx}+\frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{d^2F}{dydz}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+$$
$$+\frac{d^2F}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dF}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dF}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

équations du second ordre, dont on tirera les expressions de $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dx^2}$, après avoir substitué pour $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ les valeurs précédentes.

Ces mêmes expressions de $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dx^2}$ peuvent également être obtenues en différentiant immédiatement les valeurs précédentes de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$.

En continuant de la même manière, on obtiendrait les coefficients différentiels des ordres supérieurs des fonctions y et z.

IX. CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE.

74. Nous avons indiqué dans le n° 2 la nécessité de distinguer dans chaque question les variables indépendantes, c'est-

s sont arbitraires, et les variables fonc-
s notions ont été reproduites dans le
analytiques qui constituent le calcul
ıtiellement fondées sur la distinction
it être maintenue dans toute l'étendue
ıisque les différentiations successives
regardant comme des facteurs con-
es des variables indépendantes, tandis
es différentielles des autres variables.
employant certaines transformations,
ırs d'un calcul de nouvelles variables
que l'on avait d'abord choisies.
e idée juste des transformations dont
entera que la résolution d'une question
équation telle que

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \text{etc.} \right) = 0,$$

t regardée comme la variable indé-
me fonction de x. Cette équation
ntre x, y, et les coefficients différen-
tc., qui expriment respectivement les
subsistants entre les variations simul-
onctions y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. On admet
cesser d'être prise pour variable indé-
en prendra une autre désignée par t. Il
x et y deviendront des fonctions de t;
dance établie primitivement entre ces
ne doit pas cesser de subsister. La re-
ariables x et y, doit être donnée, soit

par une équation entre t et x, telle que $\Phi(t, x) = 0$, soit par une équation entre t et y, telle que $\Psi(t, y) = 0$, soit enfin par une équation entre les trois variables, $\Pi(t, x, y) = 0$.

Cela posé, il est visible que les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., qui entrent dans l'équation $F = 0$, doivent être remplacés par d'autres coefficients différentiels de la fonction y pris par rapport à t. Il s'agit d'opérer ce changement en conservant la dépendance de y à x. On y parviendra en remarquant simplement que quand x est fonction de t, et y fonction de x, on a, d'après la règle du n° **24**,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

expression qui doit être mise à la place de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation $F = 0$.

Cette première expression donne immédiatement celle des coefficients différentiels des ordres supérieurs. Car en différentiant les deux membres de l'équation précédente par rapport à t, et par conséquent regardant dt comme constante, il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

ou bien

$$\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

de cette expression, en différentiant
ıt par $\frac{dx}{dt}$,

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5},$$

ırs auront été substituées dans l'é-
ation contiendra x, y, et leurs coef-
par rapport à t. Si l'on a donné une
ntre t et x, on pourra remplacer,
et ses coefficients différentiels par
l'équation $\Phi(t, x) = 0$, conformé-
72. Alors x aura disparu, et l'équa-
que t, y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, etc. Si l'on
$(t, y) = 0$ entre t et y, on pourra de
et les coefficients différentiels de y,
$F = 0$ ne contiendra que t, x, $\frac{dx}{dt}$,
'on a donné une équation entre
$(t, y) = 0$, on pourra faire dis-
y, puisque cette équation et ses
prises par rapport à t (en regar-
ons de t), donneront les valeurs de

x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., en fonction de y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc., et réciproquement.

76. Si la relation établie entre t et les autres variables consistait dans l'équation $x = t$, on aurait $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^3x}{dt^3} = 0$, etc., et les formules du n° 74 se réduiraient, comme cela doit être, à $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3}$, etc.

Si la relation dont il s'agit consistait dans l'équation $y = t$, on aurait $\frac{dy}{dt} = 1$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dt^3} = 0$, etc., et ces mêmes formules deviendraient (en écrivant y au lieu de t),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5},$$

Etc.

On doit donc remplacer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., par ces dernières expressions, lorsque, dans une équation entre x et y, ayant d'abord pris x pour la variable indépendante, on veut ensuite que y devienne la variable indépendante.

77. Les formules précédentes conduisent immédiatement

différentielle des fonctions inverses

donne $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$,

ne la variable indépendante. Si l'on
soit la variable indépendante, on
ce qui donnera

ou $\frac{dx}{dy} = x$,

pour x sa valeur en y, qui est e^y,

$\frac{d.e^y}{dy} = e^y$.

donne $\frac{dy}{dx} = \cos.x$,

la variable indépendante. Si la va-
être y, on écrira

ou $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos.x}$,

our x sa valeur arc sin.y,

$\frac{\text{in.}y}{} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

L'équation

$$y = \text{tang.}x \qquad \text{donne} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos.^2 x}.$$

Donc

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos.^2 x}, \quad \frac{dx}{dy} = \cos.^2 x, \quad \text{ou} \quad \frac{d.\text{arc tang.}y}{dy} = \frac{1}{1+y^2}.$$

78. Les mêmes considérations s'appliquent aux cas où le nombre des variables est plus considérable. Si l'on avait, par exemple, l'équation

$$F\left(v, x, y, \frac{dy}{dv}, \frac{dy}{dx}, \text{etc.}, z, \frac{dz}{dv}, \frac{dz}{dx}, \text{etc.}\right) = 0,$$

dans laquelle v et x désignent les deux variables indépendantes, y et z deux fonctions de ces variables, et qu'on voulût ensuite prendre pour variables indépendantes s et t, on remarquerait que v et x devenant fonctions de s et t, tandis que y et z ne cessent point d'être fonctions de v et x, on a

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{ds} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dt} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt};$$

d'où l'on déduit par l'élimination

$$\frac{dy}{dv} = \frac{\frac{dy}{dt}\frac{dx}{ds} - \frac{dy}{ds}\frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{ds}\frac{dv}{dt} - \frac{dx}{dt}\frac{dv}{ds}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}\frac{dv}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{dv}{ds}}{\frac{dx}{ds}\frac{dv}{dt} - \frac{dx}{dt}\frac{dv}{ds}},$$

On obtiendrait des expressions semblables pour $\frac{dz}{dv}$ et $\frac{dz}{dx}$. Si l'on différentie les deux expressions précédentes de $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dy}{dt}$

ra trois équations d'où l'on pourra
s coefficients différentiels du second
t ainsi des autres coefficients diffé-
le continuer plus loin la recherche
, parce qu'il convient mieux d'opé-
sur les expressions analytiques qui

variables indépendantes a princi-
nétrie, lorsqu'on veut passer d'un
un autre. Admettons, par exemple,

$$, \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ etc.}\Big) = 0,$$

coordonnées op, mp (fig. 23)
ctangulaires, et qu'on veuille rem-
mé par le rayon vecteur om avec

$$g.\omega = \frac{y}{x}.$$

érentiée plusieurs fois de suite par
nt fonctions, donnera des équa-
aleurs de $\frac{dx}{d\omega}$, $\frac{d^2x}{d\omega^2}$, etc., qui de-
les formules du n° 74. Les valeurs
$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., représentées par
ées dans l'équation $F = 0$, cette
$\frac{d^2y}{d\omega^2}$, etc.

Si l'on veut changer entièrement le système des coordonnées, en introduisant à la place de y la longueur du rayon vecteur om, que nous désignerons par ρ, on poserait après l'équation précédente

$$y = \rho \sin. \omega,$$

et différentiant cette équation plusieurs fois de suite par rapport à ω, ρ étant regardée comme variable, on obtiendrait des équations dont on tirerait les valeurs de $\frac{dy}{d\omega}$, $\frac{d^2y}{d\omega^2}$, etc., qui devraient être substituées dans l'équation proposée, qui sera alors entre ω, ρ, $\frac{d\rho}{d\omega}$, $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$, etc.

Mais dans ce dernier cas il eût été plus simple de poser immédiatement

$$x = \rho \cos. \omega, \qquad y = \rho \sin. \omega,$$

et de déduire de ces dernières équations les valeurs de $\frac{dx}{d\omega}$, $\frac{d^2x}{d\omega^2}$, etc., et $\frac{dy}{d\omega}$, $\frac{d^2y}{d\omega^2}$, etc. Ces valeurs étant substituées dans les formules du n° 74, on obtiendrait ainsi les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., en ω, ρ, $\frac{d\rho}{d\omega}$, $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$, etc., qui devraient être substituées dans l'équation proposée.

X. EXPRESSION GÉNÉRALE DU DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION SUIVANT LES PUISSANCES ENTIÈRES DE LA VARIABLE. THÉORÈME DE TAYLOR.

80. La considération des coefficients différentiels ou des fonctions dérivées des divers ordres, donne les moyens de

ion quelconque en une série infinie
aux puissances entières de la variable.
ée

$$y = f(x).$$

tions présentées dans l'article VI, et
u n° 50, on en déduira par de simples
valeurs correspondantes de x et y,

y

$^2y + \Delta^2 y$

. . . . . .

. . . . . .

$\frac{n-1}{2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\Delta^3 y + \ldots + \Delta^n y.$

est indépendante de la nature de la
ijours être formée tant que cette fonc-
es valeurs infinies dans l'intervalle des
de la variable. Ainsi nous pouvons

$$\Delta^2 y + \frac{n^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{2.3}\Delta^3 y + \ldots + \Delta^n y,$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{(n\Delta x)^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{2.3}\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \ldots + \Delta^n y.$$

, quelle que soit la grandeur attribuée

à l'intervalle constant Δx, et quel que soit le nombre n. Admettons que l'intervalle $n\Delta x$ (qui sépare les valeurs de x auxquelles répondent les valeurs y et y_n de la fonction) demeurant constant, on fasse diminuer indéfiniment Δx, et augmenter indéfiniment le nombre n dans la même proportion. L'équation précédente ne cessera pas de subsister, et l'on peut espérer d'avoir encore un résultat exact en remplaçant chaque terme par la limite vers laquelle il tend lorsque Δx tend à devenir nulle. Or, il est visible que la limite commune des fractions $1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{1}{2n}$, etc., est l'unité, et que les limites des rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, etc., sont les coefficients différentiels ou fonctions dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. Donc en faisant pour abréger $n\Delta x = h$, on voit que l'équation

$$f(x) = y$$

conduit à la suivante

$$f(x+h)=y+h\frac{dy}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{h^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{h^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4}, + \text{etc.}$$

que l'on écrit souvent d'après Lagrange

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\frac{h^4}{2.3.4}f^{\text{iv}}(x)+\text{etc.}$$

en employant pour les coefficients différentiels ou fonctions dérivées la notation proposée par ce grand géomètre. Cette expression remarquable, appelée *théorème* ou *formule de Taylor*, du nom de son auteur, doit être regardée comme

lément principal du calcul différentiel et de ses applica-
ns. Pour rendre rigoureuse l'analyse précédente, qui du
e a toute la généralité possible, il aurait fallu examiner
lus près ce qui arrive quand on passe à la limite en fai-
Δx nulle et n infini. Mais nous donnerons dans les numé-
ivants (nos 84 à 87) une autre démonstration (et celle-là
ète au moins pour le cas de $x, h, f(x)$ et $f(x+h)$ réelles)
ormule de Taylor, en cherchant ce qu'il faut ajouter
premiers termes de la série placée au second membre
oir la valeur exacte du premier membre $f(x+h)$. En
admettons cette formule comme vraie, et ajoutons
remarques.

faisant $x=0$ dans la formule de Taylor, et dési-
$\frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}$, etc., les valeurs particulières et con-
prennent alors les fonctions $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc., il vient

$$\frac{dy_0}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2y_0}{dx^2}+\frac{h^3}{2.3}\frac{d^3y_0}{dx^3}+\frac{h^4}{2.3.4}\frac{d^4y_0}{dx^4}+\text{etc.},$$

t x au lieu de h,

$$\frac{dy_0}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2y_0}{dx^2}+\frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y_0}{dx^3}+\frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^4y_0}{dx^4}+\text{etc.}$$

rmule est connue sous le nom de série de Mac-
n emploi e la notation de Lagrange, on écrit

$$(0)+\frac{x^2}{2}\ldots(0)+\frac{x^3}{2.3}f'''(0)+\frac{x^4}{2.3.4}f^{\text{IV}}(0)+\text{etc.}$$

x par a et h par $x-a$ dans la formule du
core

$$f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{2.3}f'''(a)+\text{etc.}$$

Ces formules et celle du n° 80 dont elles sont déduites servent à développer une fonction suivant les puissances entières de la variable x, $x-a$, ou h. En général, la série se prolonge à l'infini. Les fonctions algébriques entières composées de termes de la forme gx^m, m étant un nombre entier positif, produisent seules des suites finies, les coefficients différentiels de gx^m, d'un ordre supérieur à m, étant nuls comme on l'a remarqué n° 56. Il est d'ailleurs évident que si les développements de $f(x+h)$ et de $f(x)$ ne renferment qu'un nombre limité de termes, ils se réduisent alors à des polynomes entiers. Si, par exemple, les dérivées $f^{n+1}(0)$, $f^{n+2}(0)$, etc., sont toutes nulles, il reste simplement

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\ldots\ldots+\frac{x^n}{2.3\ldots n}f^n(0),$$

en sorte que $f(x)$ est, dans cette hypothèse, une fonction algébrique entière du degré n.

82. L'équation

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\text{etc.}$$

est bien facile à établir par la méthode des coefficients indéterminés, lorsque l'on sait, *à priori*, que la fonction $f(x)$ est développable en une série de la forme $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ etc. Posons en effet

$$(1)\qquad f(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots\ldots$$

Pour déterminer les constantes inconnues $A, B, C, D, \ldots$ on prendra les dérivées successives de l'équation (1), ce qui donnera

$$f'(x)=B+2Cx+3Dx^2+\ldots\ldots$$
$$f''(x)=2C+2.3Dx+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

0, on aura

$=f'(0)$, $C=\frac{f''(0)}{2}$, etc.,

u'il fallait démontrer.

ıe manière à la série de Taylor, en

$+Bh+Ch^2+Dh^3+\ldots\ldots$

ıurs fois de suite par rapport à h, ce

$=B+2Ch+3Dh^2+\ldots\ldots$

$=2C+2.3Dh+\ldots\ldots$

. . . . . .

ù $f(x+h)=f(u)$: par le principe
s, il vient

$=f'(u)\frac{du}{dh}=f'(u)$:

,

$\frac{(x+h)}{h^2}=f''(u)$,

te que, pour $h=0$, les dérivées

, $\frac{d^2f(x+h)}{dh^2}$,.....

3

$f'(x)$, etc.

les équations (2), (3), (4),....

on obtiendra

$$A = f(x),\ B = f'(x),\ C = \frac{f''(x)}{2},\ \text{etc. C. Q. F. D.}$$

On remarquera en passant que les deux dérivées

$$\frac{df(x+h)}{dx},\quad \frac{df(x+h)}{dh}$$

ont pour expression commune $f'(u)$, et sont par suite égales entre elles, et qu'il en est de même des dérivées des ordres supérieurs, en sorte que

$$\frac{d^n f(x+h)}{dx^n} = \frac{d^n f(x+h)}{dh^n}.$$

83. Rien ne déterminant dans les formules du n° 81 la valeur de x, ni la valeur de h dans la formule du n° 80, la fonction y se trouve exprimée dans toute son étendue, ce qui est très-remarquable, au moyen de la valeur de cette fonction et des valeurs de ses coefficients différentiels des divers ordres qui répondent à une seule valeur de x. Ainsi donner les valeurs de la fonction et des coefficients différentiels pour une seule valeur de la variable, équivaut en général à donner la fonction elle-même. Mais il importe d'observer que chacune de ces séries ne peut être égale à la fonction correspondante $f(x)$ ou $f(x+h)$, et même n'a de sens, qu'autant qu'elle est *convergente*, c'est-à-dire qu'autant que les valeurs obtenues, en prenant un nombre de termes de plus en plus grand, s'approchent de plus en plus d'une certaine limite; ou, ce qui est la même chose, qu'autant que l'on peut assigner deux limites aussi resserrées qu'on le veut, entre lesquelles la valeur obtenue se trouvera toujours comprise, quelque grand que soit le nombre des termes que l'on ajoute. Dans quelques cas, la convergence d'une série est manifeste; par exemple,

uent progressivement à partir du pre-
ment positifs et négatifs, les résultats
s nombres qui diffèrent de moins en
rs un nombre intermédiaire. Lorsque
e signe, la série est convergente si
les termes correspondants d'une pro-
nt la raison est plus petite que l'unité.
ergente, si tous les termes sont plus
progression géométrique dont la rai-
grande que l'unité. En général, un
ssaire pour s'assurer si une série est

ette question en ce qui concerne la
cas ordinaire de quantités réelles au-
vent se ramener, et aussi pour trou-
proximation la somme des μ premiers
fournir la valeur de $f(x+h)$, cherchons
ent ou reste qu'on devrait ajouter à la
avoir $f(x+h)$ exactement. Essayons
entre lesquelles ce reste soit compris.
n d'un lemme très-simple, à détermi-
git. Soit une fonction quelconque $\varphi(h)$
quand la variable $h=0$: on peut affir-
jusqu'à une dernière valeur positive h,
$\frac{d.\varphi(h)}{dh}$ est constamment positif ou
ne devient pas infini, la valeur de $\varphi(h)$
C'est-à-dire du même signe que le
tant que $\frac{d.\varphi(h)}{dh}$ est positif et
vement à mesure que h augmente, et
cette même fonction croît négati-

vement. Mais cette proposition ne subsisterait plus dans les cas où le coefficient différentiel deviendrait infini une ou plusieurs fois dans l'intervalle de 0 à h.

Cela posé, comparons $f(x+h)$ au premier terme $f(x)$, puis à la somme des deux, des trois, enfin des μ premiers termes de la série $f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+$ etc.; et pour fixer les idées, supposons h positive et variable à volonté depuis 0 jusqu'à une dernière valeur h. Ne prenant d'abord que le premier terme $f(x)$, écrivons

$$f(x+h)=f(x)+h.\Pi,$$

Π étant une quantité inconnue, qui, lorsque h tend à devenir nulle, tend à devenir égale à $\frac{d.f(x)}{dx}$. La question consiste à déterminer deux limites P, Q entre lesquelles la quantité Π se trouve comprise, et qui soient telles que l'on ait, quelle que soit h,

$$f(x+h)>f(x)+h\mathrm{P}$$
$$f(x+h)<f(x)+h\mathrm{Q};$$

ou bien

$$f(x+h)-f(x)-h\mathrm{P}>0$$
$$f(x+h)-f(x)-h\mathrm{Q}<0.$$

Mais d'après le lemme précédent, la première de ces fonctions (dont la valeur est nulle lorsque $h=0$) sera positive, et la seconde sera négative, si leurs coefficients différentiels pris par rapport à h sont eux-mêmes positifs ou négatifs, et ne deviennent point infinis, depuis $h=0$ jusqu'à $h=h$; c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - P > 0,$$

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - Q < 0;$$

qu'à $h = h$. Or il est clair que l'on satisfera ; 1° en prenant pour P la plus petite de que prend la fonction $\frac{d.f(x+h)}{dh}$ depuis $= h$; 2° en prenant pour Q la plus grande prend la même fonction dans le même in-

ntenant que l'on prenne les deux premiers $\frac{f(x)}{dx}$ du développement. On déterminera de la série en assignant les valeurs de P et l'on ait, quelle que soit h,

$$+ h) > f(x) + h\frac{d.fx}{dx} + \frac{h^2}{2}P$$

$$+ h) < f(x) + h\frac{d.fx}{dx} + \frac{h^2}{2}Q;$$

$$) - f(x) - h\frac{d.f(x)}{dx} - \frac{h^2}{2}P > 0$$

$$) - f(x) - h\frac{d.f(x)}{dx} - \frac{h^2}{2}Q < 0.$$

sont nuls pour $h = 0$: donc, d'après es conditions que je viens d'écrire seront ent différentiel de la première fonction est lle à h, et si le coefficient différentiel ga dans ce même intervalle, c'est-à-

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - \frac{d.f(x)}{dx} - hP > 0$$
$$\frac{d.f(x+h)}{dh} + \frac{d.f(x)}{dx} - hQ < 0.$$

Mais ces conditions seront elles-mêmes satisfaites si, différentiant de nouveau par rapport à h, on pose

$$\frac{d^2f(x+h)}{dh^2} - P > 0$$
$$\frac{d^2f(x+h)}{dh^2} - Q < 0.$$

Donc on doit prendre ici respectivement pour P et Q la plus petite et la plus grande des valeurs qui peuvent appartenir au coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2f(x+h)}{dh^2}$, dans l'intervalle de 0 à h.

Supposons encore que prenant les trois premiers termes $f(x) + h\frac{d.f(x)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2}$ du développement, on veuille assigner les limites du reste. Il s'agira donc de déterminer P et Q de manière que l'on ait

$$f(x+h) - f(x) - h\frac{d.f(x)}{dx} - \frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2} - \frac{h^3}{2.3}P > 0$$
$$f(x+h) - f(x) - h\frac{d.f(x)}{dx} - \frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2} - \frac{h^3}{2.3}Q < 0.$$

Or ces conditions seront satisfaites si l'on a

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - \frac{d.f(x)}{dx} - h\frac{d^2.f(x)}{dx^2} - \frac{h^2}{2}P > 0$$
$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - \frac{d.f(x)}{dx} - h\frac{d^2.f(x)}{dx^2} - \frac{h^2}{2}Q < 0.$$

Ces dernières le seront elle-mêmes si l'on a

$$\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2} - \frac{d^2.f(x)}{dx^2} - hP > 0$$
$$\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2} - \frac{d^2.f(x)}{dx^2} - hQ < 0.$$

e seront si l'on a

$$\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2} - P > 0$$
$$\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2} - Q < 0;$$

n prend pour P la plus petite, et pour Q la
aleurs qu'affectera la fonction $\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2}$
de 0 à h.
de la même manière, on voit que tant que
différentiels ne deviennent point infinis, on
ne fonction par la série de Taylor, et s'ar-
quelconque, en fixant les limites de la valeur
glige. Nous remarquerons d'ailleurs que les
z tiels $\frac{d.f(x+h)}{dh}$, $\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2}$, etc., ne diffèrent
, $\frac{d^2.f(x+h)}{dx^2}$, etc., ou de $\frac{d.f(u)}{du}$, $\frac{d^2.f(u)}{du^2}$, etc.,
st donc assuré que la valeur de la série est
re celles des deux expressions suivantes :

$$= f(x) + \frac{h^2}{2.3}\frac{d^2.f(x)}{dx^2} + \ldots\ldots + \frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\ldots\mu}P,$$
$$= f(x) + \frac{h^2}{2.3}\frac{d^2.f(x)}{dx^2} + \ldots\ldots + \frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\ldots\mu}Q,$$

ent la plus petite et la plus grande
le coefficient différentiel $\frac{d^\mu.f(x)}{dx^\mu}$ pour
variable comprises entre x et $x+h$.

85. Il est visible, d'après ce qui précède, que l'on aura toujours la valeur exacte de $f(x+h)$ en prenant pour dernier terme le produit de $\frac{h^\mu}{2.3.4....\mu}$ par un certain facteur compris entre P et Q, c'est-à-dire par une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs de la fonction $\frac{d^\mu.f(x)}{dx^\mu}$ qui ont lieu dans l'intervalle de x à $x+h$. Si cette fonction est continue, le facteur dont nous parlons sera évidemment une des valeurs qu'elle prend dans l'intervalle indiqué. C'est ce qu'on exprime en écrivant

$$h)=f(x)+h\frac{d.f(x)}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2}+\frac{h^3}{2.3}\frac{d^3.f(x)}{dx^3}+....+\frac{h^\mu}{2.3.4...\mu}\frac{d^\mu.f(x+\theta h)}{dx^\mu}:$$

θ est ici un nombre inconnu compris entre 0 et l'unité.

Jusqu'ici nous avons supposé h positive; mais une analyse toute semblable, appliquée au cas de h négative, conduirait, après des changements de détail, précisément à la même formule. Le cas de h négative se ramène d'ailleurs à celui de h positive, en posant $h=-k$, $x=-y$, $f(x)=F(y)$, d'où $f'(x)dx=F'(y)dy=-F'(y)dx$, $F'(y)=-f'(x)$ et généralement $F^n(y)=(-1)^n f^n(x)$. De là on conclut sans peine en développant $F(y+k)$, c'est-à-dire $f(x+h)$, suivant les puissances de k, l'entière généralité de la formule que nous venons d'obtenir.

Quelques géomètres écrivent encore le dernier terme de cette manière,

$$\frac{h^\mu}{2.3.4.....\mu}\frac{d^\mu.f(x.....x+h)}{dx^\mu},$$

afin d'indiquer que l'on doit mettre pour x dans ce terme, sous le signe de la fonction, une des valeurs de la variable comprises entre x et $x+h$. Cette valeur est inconnue; mais

on sait que l'on a une limite supérieure des valeurs de $f(x+h)$ en mettant celle qui rend $\frac{d^\mu.f(x)}{dx^\mu}$ le plus grand possible, et ne limite inférieure de $f(x+h)$ en mettant celle qui rend $\frac{d^\mu.f(x)}{dx^\mu}$ le moindre possible. Il est évident d'ailleurs que si la ction $\frac{d^\mu.f(x)}{dx^\mu}$ est constamment croissante ou constamment ɔissante depuis $x=x$ jusqu'à $x=x+h$, les limites dont it seront données par les valeurs $\frac{d^\mu.f(x)}{dx^\mu}$ qui répondent x et à $x=x+h$.

ɔn peut, comme dans le n° 81, faire $x=0$ dans la for-écédente, puis écrire x au lieu de h, ce qui donnera

$$)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{2.3}f'''(0)+\ldots\ldots+\frac{x^\mu}{2.3.4\ldots\mu}f^\mu(\theta x),$$

:t toujours un nombre dont la valeur n'est pas dé-mais se trouve comprise entre 0 et l'unité. On eux limites entre lesquelles la valeur de $f(x)$ sera ent comprise, en mettant dans le dernier terme, la plus petite et la plus grande valeur que prenne différentiel dans l'intervalle de 0 à x.

ɔyen de l'expression du reste de la série de ɔus venons de donner et qui est due à Lagrange, uestions relatives à la convergence et à la somme vient plus facile. En effet, la série est nécessaire-te, et a pour somme $f(x+h)$, si la valeur du ntaire $\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}\frac{d^\mu.f(x+\theta h)}{dx^\mu}$ devient plus grandeur donnée lorsque le nombre μ ment. On trouvera plus loin, § XI, l'ap-ncipe général à des exemples choisis.

Des cas où, pour certaines valeurs particulières de la variable, la série de Taylor ne donne point le développement de la fonction.

88. L'existence de la série de Taylor suppose que la fonction $y = f(x)$, et ses coefficients différentiels $f'(x)$, $f''(x)$, etc., ne deviennent pas infinis pour la valeur de x à partir de laquelle l'accroissement désigné par h est compté. Si le contraire a lieu, la série sera en défaut. Soit par exemple la fonction $f(x)$ de la forme $\frac{F(x)}{(x-a)^m}$, m désignant un nombre positif, et $F(x)$ une fonction de x qui ne devient pas nulle ni infinie lorsque $x = a$. Si, conformément aux règles précédentes, on développe $\frac{F(x+h)}{(x+h-a)^m}$ en une série ordonnée suivant les puissances entières de h, tous les termes deviendront infinis lorsqu'on y fera $x = a$. Cependant la fonction a alors une valeur déterminée qui est $\frac{F(a+h)}{h^m}$. Mais comme le développement de cette valeur suivant les puissances de h doit nécessairement présenter des puissances négatives de cette quantité, il ne peut plus être donné par la série de Taylor.

89. Soit encore la fonction $\log. x$. Tous les termes du développement de $\log.(x+h)$ deviennent infinis lorsqu'on y fait $x = 0$. Cependant la fonction présente alors une valeur déterminée, qui est $\log. h$; mais cette valeur ne peut être représentée par une série ordonnée suivant les puissances entières de h, puisque $\log. h = -\frac{1}{0}$ lorsque $h = 0$.

90. La série de Taylor donne naturellement des résultats indéterminés, lorsque la fonction proposée $f(x)$ contenant des radicaux, la valeur particulière attribuée à x fait disparaître ces radicaux dans la fonction et dans ses coefficients diffé-

rentiels. Pour en concevoir la raison, il faut remarquer qu'un radical de la forme $\sqrt[q]{(x-a)^p}$, p et q désignant des nombres entiers, qui fait partie de la fonction $f(x)$, donne à cette fonction autant de valeurs différentes réelles ou imaginaires qu'il se trouve d'unités dans le nombre q. Comme ce même radical se reproduit dans les coefficients différentiels de la fonction, ces coefficients présentent eux-mêmes, comme cela doit être, un nombre q de valeurs. Ainsi il y a, à proprement parler, autant de développements particuliers et différents les uns des autres que le radical dont il s'agit présente de valeurs. Mais si l'on donne à x la valeur particulière a, le radical disparaît de tous les termes de la série, tandis qu'il subsiste toujours dans la fonction, où il est devenu $\sqrt[q]{h^p}$. Donc la série ne peut plus alors représenter la fonction, puisque celle-ci a plusieurs valeurs, tandis que la série n'en aurait qu'une. L'analyse résout cette contradiction en donnant des valeurs infinies aux termes de la série, qui ne représente plus alors de résultat déterminé.

Le développement de $f(x)$ doit, dans le cas dont nous nous occupons, contenir des termes affectés de $h^{\frac{p}{q}}$. On connaîtra ce développement en faisant dans la fonction proposée $x=a+h$, et développant $f(a+h)$. Les puissances fractionnaires de h paraîtront dans ce dernier développement.

91. Soit, par exemple

$$f(x)=2ax-x^2+a\sqrt{x^2-a^2},$$

qui donne

$$\frac{d.f(x)}{dx}=2(a-x)+\frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$\frac{d^2.f(x)}{dx^2}=-2+\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{ax^2}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

etc.

En faisant $x = a$, on a $f(x) = a^2$, et les coefficients différentiels de tous les ordres sont infinis. Cette circonstance indique que le développement de $f(x+h)$ doit ici contenir des puissances fractionnaires de h lorsque $x = a$. La fonction devient alors en effet

$$f(a+h) = a^2 - h^2 + a\sqrt{h}\,\sqrt{2a+h},$$

dont le développement suivant les puissances de h contiendra les termes $h^{\frac{1}{2}}$, $h^{\frac{3}{2}}$, $h^{\frac{5}{2}}$, etc.

92. On doit remarquer d'ailleurs qu'un radical contenu dans la fonction $f(x)$ peut disparaître de deux manières différentes lorsqu'on attribue une valeur particulière à la variable x, savoir : 1° parce que la quantité contenue sous le radical deviendrait nulle ; 2° parce qu'un facteur dont ce radical serait affecté deviendrait nul. Dans le premier cas le développement déduit de la série de Taylor ne peut jamais convenir à la fonction $f(x+h)$ pour la valeur particulière de x dont il s'agit, par la raison indiquée n° 90. Mais il n'en est pas de même dans le second cas, parce que le facteur dont le radical est affecté, et qui devient nul dans la fonction, peut cesser d'affecter ce radical dans les coefficients différentiels des ordres supérieurs, en sorte qu'il ne disparaîtrait pas, et que la série présenterait en conséquence le nombre de valeurs nécessaire. Cette série convient donc aux cas dont il s'agit, et donne une valeur déterminée.

93. Si par exemple la fonction proposée était

$$f(x) = (x-a)^m \sqrt{x-b}\,;$$

m étant un nombre entier positif, on trouverait

$$\frac{d.f(x)}{dx} = m(x-a)^{m-1}\sqrt{x-b} + \frac{(x-a)^m}{2\sqrt{x-b}},$$

$$\frac{d^2.f(x)}{dx^2} = m(m-1)(x-a)^{m-2}\sqrt{x-b} + \frac{m(x-a)^{m-1}}{\sqrt{x-b}} - \frac{(x-a)^m}{4(x-b)^{\frac{3}{2}}},$$

etc.

Chaque différentiation fait disparaître dans le premier terme un des facteurs de $(x-a)^m$. Après un nombre m de différentiations ces facteurs auront entièrement disparu, et par conséquent la supposition $x=a$, en rendant nuls tous les coefficients différentiels des m premiers ordres, laissera subsister le radical $\sqrt{x-b}$ dans tous les autres.

Valeurs des quantités qui se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

94. Les notions précédentes s'appliquent directement à la recherche de la valeur des fractions, telles que

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

qui, pour une certaine valeur $x=a$ de la variable, se réduisent à l'expression indéterminée $\frac{0}{0}$.

La valeur $x=a$ étant supposée réduire à zéro les deux termes $f(x)$ et $F(x)$, demander la valeur de la fraction dans ce cas, c'est évidemment demander la limite dont s'approche indéfiniment le rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ lorsque x tend à devenir égale à a. Or, tant que la variable x demeure indéterminée, on

peut toujours, en développant les deux fonctions par le théorème de Taylor, poser l'équation

$$\frac{f(x+h)}{F(x+h)} = \frac{f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{2.3}f'''(x) + \text{etc.}}{F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2}F''(x) + \frac{h^3}{2.3}F'''(x) + \text{etc.}}$$

Supposons d'abord que les deux développements ne tombent point, lorsqu'on donne à x la valeur particulière a, dans les cas d'exception considérés dans les n°s 88 et suivants. On aura évidemment la valeur demandée en faisant d'abord $x = a$, puis en examinant vers quelle limite tend le second membre lorsque h tend à devenir égale à zéro. Or, puisque $f(a)$ et $F(a)$ sont nulles par hypothèse, cette limite est évidemment

$$\frac{f'(a)}{F'(a)},$$

c'est-à-dire le quotient des coefficients différentiels ou des fonctions dérivées du premier ordre des fonctions $f(x)$ et $F(x)$, dans lesquelles on a fait $x = a$.

Si la valeur $x = a$ faisait aussi évanouir ces deux coefficients différentiels du premier ordre, on trouverait alors de la même manière

$$\frac{f''(a)}{F''(a)},$$

pour la valeur demandée. Et ainsi de suite en prenant toujours pour la valeur de la fraction proposée le quotient des deux premiers coefficients différentiels que la valeur $x = a$ ne rend pas nuls en même temps.

Mais si le premier coefficient différentiel, qui ne s'évanouit

pas au numérateur, n'était pas du même ordre que le premier coefficient différentiel qui ne s'évanouit pas au dénominateur, il est visible que la valeur demandée serait 0 ou $\frac{1}{0}$, c'est-à-dire nulle ou infiniment grande, suivant que le nombre des termes qui disparaissent au numérateur est plus grand ou moindre que le nombre des termes qui disparaissent au dénominateur.

95. Si l'on admet maintenant que les deux fonctions $f(x)$ et $F(x)$, ou seulement l'une d'entre elles, ne puissent pas se développer suivant les puissances entières de h lorsqu'on donne à x la valeur particulière a, conformément à ce qu'on a vu dans les nos 88 et suivants, la règle précédente ne pourra plus s'appliquer. Il faudra alors, pour connaître la valeur de la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$, développer les deux termes de la fraction $\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$ en deux séries qui contiendront des puissances négatives ou fractionnaires de h, puis faire $h=0$, après avoir supprimé le facteur commun au numérateur et au dénominateur.

96. Soit par exemple la fraction

$$\frac{x-x^{n+1}}{1-x},$$

dont on demande la valeur lorsque $x=1$. Le rapport des coefficients différentiels du premier ordre des deux termes est

$$\frac{1-(n+1)x^n}{-1},$$

et en faisant $x=1$, on trouve n. En effet la fraction propo-

sée représente la somme des termes de la progression géométrique $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$.

Soit encore la fraction

$$\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2},$$

qui est le coefficient différentiel du premier ordre de la précédente, et qui représente par conséquent la somme des termes de la série $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$. Le rapport des coefficients différentiels des deux termes est

$$\frac{-n(n+1)x^{n-1}+n(n+1)x^n}{-2(1-x)},$$

et comme il devient $\frac{0}{0}$ quand on fait $x = 1$, on prendra le rapport des coefficients différentiels du second ordre, qui est

$$\frac{-(n-1)n(n+1)x^{n-2}+n^2(n+1)x^{n-1}}{2},$$

et en faisant $x = 1$ on trouve $\frac{n(n+1)}{2}$ pour la valeur demandée.

Si la fraction proposée est

$$\frac{l(1+x)}{x^n},$$

n désignant un nombre positif, on a pour le rapport des coefficients différentiels des deux termes

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{nx^{n-1}}.$$

Ainsi la valeur de cette fraction, correspondante à $x=0$, est $\frac{1}{0}$, 1 ou 0 suivant que l'exposant n est $>1, =1$, ou <1.

Il en est de même à l'égard des fractions $\frac{e^x-1}{x^n}$ et $\frac{\sin x}{x^n}$, n désignant toujours un nombre positif. Quant à la fraction $\frac{1-\cos. x}{x^n}$, il faut passer aux coefficients différentiels du second ordre, ce qui donne $\frac{\cos. x}{n(n-1)x^{n-2}}$. Ainsi la valeur de cette dernière fraction correspondante à $x=0$ est $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{2}$ ou 0 suivant que l'exposant n est $>2, =2$, ou <2. On voit par là que x étant plus petite que toute grandeur donnée, ou infiniment petite, $1-\cos. x$ est infiniment petit par rapport à x ou à $\sin. x$.

97. Mais si l'on proposait une fraction telle que

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

et qu'on demandât sa valeur dans le cas où $x=a$, comme le numérateur et le dénominateur ne peuvent pas se développer suivant les puissances entières de h lorsqu'on y met $a+h$ à la place de x (leurs coefficients différentiels devenant infinis lorsqu'on y fait $x=a$), il faudrait, comme on l'a dit n° 95, faire $x=a+h$, ce qui donne

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2a+h}.\sqrt{h}};$$

et en développant suivant les puissances de h, puis suppri-

mant le facteur $\sqrt{h}$ commun aux deux termes de la fraction, il vient

$$\frac{1+\frac{\sqrt{h}}{2\sqrt{a}}-\text{etc.}}{\sqrt{2a}+\frac{h}{2\sqrt{2a}}-\text{etc.}}.$$

On trouve donc, en faisant $h=0$, pour la valeur demandée,

$$\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

98. On se rend compte facilement de ces résultats par la géométrie. La fraction proposée étant $\frac{f(x)}{F(x)}$, soient Mn et MN (*fig.* 24) les courbes dont les ordonnées sont respectivement représentées par $f(x)$ et $F(x)$. Cette fraction exprime la valeur du rapport $\frac{Pn}{PN}$ des ordonnées des deux courbes qui correspondent à une même valeur OP de l'abscisse x; et puisque les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ deviennent nulles lorsque $x=a$, il s'ensuit nécessairement que les deux courbes se rencontrent en un même point de l'axe des x situé à la distance $OM=a$ de l'origine. Demander la valeur de la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ lorsque $x=a$, c'est donc demander la limite vers laquelle tend le rapport des deux ordonnées Pn, PN lorsque la distance MP tend à devenir nulle. Or, cette limite est évidemment le rapport des deux tangentes trigonométriques des angles formés avec l'axe des x par les tangentes menées aux deux courbes au point M, c'est-à-dire $\frac{f'(a)}{F'(a)}$.

Si les deux coefficients différentiels $f'(x)$ et $F'(x)$ étaient nuls pour la valeur $x = a$, les deux courbes auraient alors au point M l'axe des x pour tangente commune. La limite du rapport des ordonnées serait donnée par la valeur $\frac{f''(a)}{F''(a)}$, car le coefficient différentiel du second ordre est alors proportionnel, ainsi qu'on le verra dans la suite, à l'intervalle dont la courbe s'éloigne de l'axe des x, lorsqu'on s'avance sur cet axe à une distance infiniment petite du point de contact.

XI. DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS SIMPLES D'UNE VARIABLE.

1° Fonction x^m.

99. L'expression des coefficients différentiels des divers ordres de la fonction x^m a été donnée n° 54. On a généralement

$$\frac{d^\mu x^m}{dx^\mu} = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-\mu+1)x^{m-\mu}.$$

Il en résulte que l'expression de $(x+h)^m$, en tenant compte du reste de la série conformément à ce qu'on a vu n° 85, est

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}h^2 + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\mu}(x+\theta h)^{m-\mu}h^\mu,$$

θ désignant toujours un nombre compris entre zéro et l'unité. Nous admettrons dans ce qui va suivre que la valeur de x surpasse celle de h, et que x et h sont positives, ou plutôt sont de même signe ; si ces deux quantités étaient de signes

opposés, et si en même temps la valeur numérique de h était plus petite que celle de x, le théorème auquel nous arriverons subsisterait encore, mais il exigerait une démonstration particulière. Les deux limites de la valeur du facteur $(x+\theta h)^{m-\mu}$ sont évidemment $x^{m-\mu}$ et $(x+h)^{m-\mu}$, en sorte que la valeur du développement est comprise entre les valeurs qui correspondent à ces deux limites; et on peut prouver que le reste de la série se réduit à zéro pour $\mu=\infty$. Car, en prenant un terme de plus, les deux limites du terme qui représente ce reste seront égales aux limites précédentes multipliées respectivement par les rapports

$$\frac{m-\mu}{\mu+1}\,\frac{h}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{m-\mu}{\mu+1}\,\frac{h}{x\left(1+\frac{h}{x}\right)},$$

dont la valeur sera toujours plus petite que l'unité, pour des valeurs de μ très-grandes, si $\frac{h}{x}$ est lui-même plus petit que l'unité. Ces deux limites diminuent ainsi indéfiniment lorsque μ augmente, et il est aisé de voir qu'elles se réduisent à zéro, ainsi que le reste de la série, lorsque $\mu=\infty$. La série infinie x^m+ etc., est donc convergente et égale à $(x+h)^m$. Mais elle finirait par être divergente, quoiqu'elle pût être convergente dans les premiers termes, si $\frac{h}{x}$ était >1.

100. En divisant les deux membres par x^m, puis écrivant x à la place de $\frac{h}{x}$, on a

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^3+\ldots\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{2.3\ldots\ldots\mu}(1+\theta x)^{m-\mu}x^{\mu}.$$

La série infinie qu'on obtiendra en faisant $\mu = \infty$ sera nécessairement convergente lorsque x sera < 1.

D'après ce qui précède, la formule du binôme de Newton, qui est donnée dans les éléments pour le seul cas de l'exposant m entier et positif, se trouve démontrée, quel que soit cet exposant.

2° Fonction logarithmique log. x.

101. On a, conformément aux nos 19 et 57,

$$\frac{d^\mu . \log . x}{dx^\mu} = \pm \log . e . \frac{1.2.3.....(\mu - 1)}{x^\mu},$$

les signes supérieur et inférieur ayant lieu respectivement lorsque μ est impair ou pair. Par conséquent, d'après le no 85, la valeur de log. $(x + h)$ est exprimée par

$$\log.(x+h) = \log.x + \log.e \left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - ..... \pm \frac{h^\mu}{\mu(x+\theta h)^\mu}\right).$$

Le reste de la série se réduira à 0 pour $\mu = \infty$, pourvu que le rapport $\frac{h}{x}$ ne surpasse pas l'unité. On s'en convaincra en observant que les limites de ce reste sont égales aux facteurs $\frac{h^\mu}{\mu x^\mu}$ et $\frac{h^\mu}{\mu(x+h)^\mu}$ multipliés par $\pm \log. e$; toutefois cela suppose que le rapport $\frac{h}{x}$ est positif : s'il était négatif, il faudrait une autre démonstration que nous ne donnerons pas ici. Nous supposons le logarithme pris dans un système quelconque. S'il est pris dans le système dont la base est e, on fera log. $e = 1$.

102. Si l'on fait $x = 1$, et si l'on écrit ensuite x à la place de h, la formule précédente donne

$$\log.(1+x) = \log.e\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\ldots \pm \frac{x^\mu}{\mu(1+\theta x)^\mu}\right);$$

et si le logarithme est népérien, on a simplement

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots\ldots \pm \frac{x^\mu}{\mu(1+\theta x)^\mu}.$$

Les séries sont convergentes lorsque x est compris entre $+1$ et -1.

En faisant $x = 1$ la dernière équation donne

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.};$$

et en faisant $x = -1$,

$$l0 = -\frac{1}{0} = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}\right).$$

Ainsi la suite $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc., n'est pas convergente.

Si l'on ajoute entre elles les deux équations suivantes

$$\log.(1+x) = \log.e\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right)$$

$$-\log.(1-x) = \log.e\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right),$$

il viendra

$$\log.\frac{1+x}{1-x} = 2\log.e\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{etc.}\right).$$

103. Nous indiquerons succinctement la manière dont on a effectué le calcul des logarithmes. La série qui donne $\log.(1+x)$, lorsqu'on y fait $x = y - 1$, devient

$$\log.y = \log.e\left[y - 1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \frac{1}{4}(y-1)^4 + \text{etc.}\right];$$

et si le logarithme était népérien, cas dans lequel nous le désignons simplement par la lettre l, on aurait

$$ly = y - 1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \frac{1}{4}(y-1)^4 + \text{etc.}$$

Ces formules ne pourraient être employées qu'autant que le nombre y différerait très-peu de l'unité. Mais si l'on fait $y = \sqrt[r]{z}$, r désignant un nombre quelconque, la première donnera

$$\log.z = r\log.e\left[\sqrt[r]{z} - 1 - \frac{1}{2}(\sqrt[r]{z} - 1)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt{z} - 1)^3 - \text{etc.}\right];$$

et si le nombre r est pris négativement,

$$\log.z = r\log.e\left[1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

Ces deux séries, dans lesquelles on peut donner à r telle valeur que l'on veut, seront très-convergentes si l'on prend le nombre r tel que $\sqrt[r]{z}$ diffère très-peu de l'unité. Dans le calcul que nous avons en vue, on peut supposer d'ailleurs $z > 1$, et alors la première série ayant des termes alternativement positifs et négatifs, tandis que tous ceux de la seconde sont positifs, on a

$$\log. z < r \log. e(\sqrt[r]{z} - 1) \quad \text{et} \quad \log. z > r \log. e \left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right).$$

Ce qui donne deux limites que l'on peut resserrer à volonté en augmentant l'exposant r du radical.

104. Il est nécessaire toutefois de connaître log. e. On y parvient en remarquant que a désignant la base du système auquel appartient log. z, on a $e = a^{\log. e}$; et en prenant de part et d'autre les logarithmes népériens $1 = \log. e. la$; d'où $\log. e = \frac{1}{la}$. L'expression de ly du numéro précédent fournit, si a diffère peu de l'unité,

$$la = \frac{1}{\log. e} = a - 1 - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + \text{etc.}$$

et d'ailleurs les formules pour log. z, appliquées au cas d'un logarithme népérien, donnent

$$la = \frac{1}{\log. e} = r\left[\sqrt[r]{a} - 1 - \frac{1}{2}(\sqrt[r]{a} - 1)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt[r]{a} - 1)^3 + - \text{etc.}\right],$$

$$la = \frac{1}{\log. e} = r\left[1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

Le nombre la, c'est-à-dire le logarithme népérien de la base du système, est nommé par les géomètres le *module*. Dans le système des logarithmes népériens le module est égal à l'unité. Les logarithmes pris dans le système dont la base est a étant multipliés par la ou le module, deviendront les logarithmes népériens.

105. Dans le système des logarithmes ordinaires la base $a = 10$. En prenant $r = 2^{60}$ on trouve en extrayant 60 fois la racine carrée du nombre 10,

$$\sqrt[2^{60}]{10} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527$$

$$\frac{1}{2^{60}} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 73617\ 37988\ 40354.$$

Donc

$$\frac{1}{la} = \log.e = \frac{86\ 73617\ 37988\ 40354}{199\ 71742\ 08125\ 50527} = 0{,}43429\ 44819\,,$$

et

$$la = \frac{1}{\log.e} = 2{,}30258\ 50930.$$

On doit multiplier par ce dernier nombre les logarithmes ordinaires pour les changer en logarithmes népériens.

D'après cela le logarithme d'un nombre quelconque, de 3 par exemple, s'obtiendra en extrayant soixante fois sa racine carrée, ce qui donne

$$\sqrt[2^{60}]{3} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00095\ 28942\ 64074\ 58932,$$

d'où

$$\log.3 = \frac{\sqrt[2^{60}]{3} - 1}{\sqrt[2^{60}]{10} - 1} = \frac{95\ 28942\ 64074\ 58932}{199\ 71742\ 08125\ 50527} = 0{,}47712\ 12547\ 19662.$$

On peut remarquer que, d'après la formule du n° 100, on a,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8(1+\theta x)^{\frac{3}{2}}}\,;$$

d'où l'on conclut facilement que lorsqu'on extrait la racine carrée d'un nombre qui n'a que l'unité avant la virgule, et qu'on s'arrête à deux fois autant de décimales qu'il y a de zéros après la virgule, la partie décimale de la racine est exactement la moitié de la partie décimale du nombre.

Comme la formule du n° 102 donne d'ailleurs sensiblement, pour x petit, $\log.(1+x)=x \log. e$, on reconnaît de plus que les parties décimales dont il s'agit sont proportionnelles aux logarithmes et les donnent immédiatement.

(*Voyez* sur ce sujet le *Précis* qui est devant les *Tables de logarithmes* de Callet.)

3° Fonction exponentielle a^x.

106. D'après les n°s 22 et 58 on a $\frac{d^\mu.a^x}{dx^\mu}=(la)^\mu.a^x$, d'où l'on conclut

$$a^{x+h}=a^x\left(1+la.h+\frac{(la)^2}{2}h^2+\frac{(la)^3}{2.3}h^3+\ldots\ldots+\frac{(la)^\mu a^{\theta h}}{2.3.4\ldots\mu}h^\mu\right).$$

Les deux limites du terme qui exprime le reste de la série comprise dans la parenthèse sont respectivement $\frac{(la)^\mu}{2.3.4\ldots\mu}h^\mu$, et $\frac{(la)^\mu a^h}{2.3.4\ldots\mu}h^\mu$. Dans cette expression la est le logarithme népérien du nombre a. La série est convergente, quelles que soient h et x; car en prenant un terme de plus, les expressions des limites du reste seront égales aux précédentes multipliées par $\frac{la.h}{\mu+1}$, d'où l'on conclut que les restes tendent à devenir nuls lorsque μ augmente indéfiniment.

107. En divisant par a^x, puis écrivant x à la place de h, il vient

$$a^x=1+la.x+\frac{(la)^2}{2}x^2+\frac{(la)^3}{2.3}x^3+\ldots\ldots+\frac{(la)^\mu a^{\theta x}}{2.3.4\ldots\mu}x^\mu.$$

Si l'on fait $x=1$, on a

$$a = 1 + la + \frac{(la)^2}{2} + \frac{(la)^3}{2.3} + \frac{(la)^4}{2.3.4} + \text{etc.},$$

ce qui donne la base a en fonction du module, comme la série du n° 104 donne le module en fonction de la base.

Si l'on fait $a = e$, on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \text{etc.},$$

série qui est toujours convergente. En supposant $x = 1$, on retrouve, comme cela doit être, l'expression du nombre e donnée n° 16.

4° Fonctions trigonométriques sin. x et cos. x.

108. Nous avons, d'après le n° 59,

$$\frac{d^\mu.\sin.x}{dx^\mu} = \sin.\left(x + \frac{\mu\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{d^\mu.\cos.x}{dx^\mu} = \cos.\left(x + \frac{\mu\pi}{2}\right).$$

Par conséquent,

$$\sin.(x+h) = \sin.x + \cos.x.h - \frac{\sin.x}{2}h^2 - \frac{\cos.x}{2.3}h^3 +$$

$$+ \frac{\sin.x}{2.3.4}h^4 + \ldots\ldots + \frac{\sin.\left(x + \theta h + \frac{\mu\pi}{2}\right)}{2.3.4\ldots\ldots\mu}h^\mu$$

$$\cos.(x+h) = \cos.x - \sin.x.h - \frac{\cos.x}{2}h^2 + \frac{\sin.x}{2.3}h^3 +$$

$$+ \frac{\cos x}{2.3.4}h^4 - \ldots\ldots + \frac{\cos.\left(x + \theta h + \frac{\mu\pi}{2}\right)}{2.3.4\ldots\ldots\mu}h^\mu.$$

Comme la valeur du sinus ou du cosinus d'un arc quelcon-

que est toujours comprise entre -1 et $+1$, les termes qui représentent les restes de ces deux séries sont nécessairement compris entre $-\frac{h^\mu}{2.3.4....\mu}$ et $+\frac{h^\mu}{2.3.4....\mu}$.

Les séries sont toujours convergentes, quelles que soient h et x, puisqu'en prenant un terme de plus les limites des restes sont égales aux précédentes multipliées par le rapport $\frac{h}{\mu+1}$, rapport qui diminue indéfiniment lorsque μ augmente de plus en plus.

109. On peut faire $x=0$, puis écrire x à la place de h, ce qui donnera

$$\sin.x=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}+\text{etc.}$$

$$\cos.x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\text{etc.}$$

On a ainsi deux séries, toujours convergentes, et qui jouissent en outre des propriétés particulières aux séries dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. Ces expressions ont été données par Newton.

On ne doit point perdre de vue d'ailleurs, soit en faisant usage de ces formules, soit dans toute autre occasion, que la lettre x désignant un arc est toujours le nombre abstrait qui exprime la longueur de cet arc dans la circonférence dont le rayon est l'unité. Tant que la quantité x est sous les signes sin., cos., tang., etc., on peut concevoir cette quantité exprimée en degrés du quart de cercle; mais on doit, quand elle est hors de ces signes, lui donner sa véritable expression. Si on continue à l'exprimer en degrés, dont 90 forment le quart de cercle, il faut alors multiplier le nombre de degrés par le rapport $\frac{\pi}{180^\circ}$.

110. Nous prendrons encore pour exemple la fonction $y = \text{arc. tang. } x$. On a, d'après le n° 35,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \cos.^2 y.$$

Donc, en différentiant, et considérant que dans le second membre y est fonction de x,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\cos.y \sin.y. \frac{dy}{dx} = -2\cos.y. \sin.y. \cos.^2 y$$
$$= -\sin.2y. \cos.^2 y.$$

En continuant à différentier, on trouve

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2(\cos.2y. \cos.^2 y - \sin.2y. \cos.y. \sin.y) \frac{dy}{dx}$$
$$= -2\cos.3y. \cos.^3 y,$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2.3(\sin.3y. \cos.^3 y + \cos.3y. \cos.^2 y. \sin.y) \frac{dy}{dx}$$
$$= 2.3 \sin.4y. \cos.^4 y,$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = 2.3.4 (\cos.4y. \cos.^4 y - \sin.4y. \cos.^3 y. \sin.y) \frac{dy}{dx}$$
$$= 2.3.4 \cos.5y. \cos.^5 y,$$

et ainsi de suite. Ainsi l'on a

$$\text{arc. tang.}(x+h) = y + \cos.y. \cos.y.h - \sin.2y. \cos.^2 y. \frac{h^2}{2}$$
$$- \cos.3y \cos.^2 y \frac{h^3}{3} + \sin.4y. \cos.^4 y. \frac{h^4}{4} + \cos.5y. \cos.^5 y \frac{h^5}{5} - \text{etc.},$$

formule qui donne l'expression de l'arc dont la tangente est $x+h$, en fonction de l'arc dont la tangente est x.

Si l'on suppose $x = 0$, il vient

$$\text{arc. tang.} h = h - \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} - \frac{h^7}{7} + \text{etc.}$$

Cette dernière formule a été donnée par Leibnitz. On en déduit en faisant $h = 1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}$$

expression remarquable du rapport de la circonférence au diamètre.

XII. RELATIONS QUI EXISTENT ENTRE LES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

111. On sait que, conformément aux notations adoptées dans l'analyse, on exprime par le signe $\sqrt{-1}$ la quantité qui, étant multipliée par elle-même, donnerait -1. Quoique cette quantité, à proprement parler, n'existe pas, et que l'expression $\sqrt{-1}$ et toutes les fonctions qui en dépendent soient par cette raison appelées *imaginaires*, on peut néanmoins les soumettre à toutes les opérations analytiques, en considérant $\sqrt{-1}$ comme une constante. Nous remarquerons que l'on a pour l'expression des puissances de $\sqrt{-1}$

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$
$$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4 = 1$$
$$(\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^6 = -1$$
$$\text{etc.}$$

Nous rappellerons aussi que si l'on a une équation telle que

$$A + B\sqrt{-1} = P + Q\sqrt{-1},$$

A, B, P, Q étant des quantités réelles, on en conclut nécessairement

$$A = P \quad \text{et} \quad B = Q\,;$$

par conséquent si l'on a

$$A + B\sqrt{-1} = P\,, \quad \text{ou} \quad A + B\sqrt{-1} = Q\sqrt{-1}$$

on en conclut de la même manière

$$A = P \quad \text{et} \quad B = 0\,, \quad \text{ou} \quad A = 0 \quad \text{et} \quad B = Q.$$

112. La quantité imaginaire

$$a + b\sqrt{-1}$$

peut toujours se mettre sous la forme

$$\rho(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\,\sin.\varphi),$$

ρ et φ désignant deux quantités réelles, dont les valeurs sont déterminées en posant

$$\rho\cos.\varphi = a\,, \quad \text{d'où} \quad \rho = +\sqrt{a^2+b^2}\,, \quad \cos.\varphi = \frac{a}{\rho}\,,$$

$$\rho\sin.\varphi = b\,, \qquad \sin.\varphi = \frac{b}{\rho}.$$

La quantité ρ, qui est toujours un nombre positif, est appelée le *module* de l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$; φ représente l'un quelconque des angles, dont le cosinus et le sinus sont donnés par ces expressions.

113. Cela posé, reprenons le développement de la fonction e^x donné n° 107, qui est

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^5}{2.3.4.5}+\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}+\text{etc.}$$

En substituant dans cette équation $x\sqrt{-1}$ à la place de x, elle deviendra

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5}$$
$$- \frac{x^6}{2.3.4.5.6} - \frac{x^7\sqrt{-1}}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Or, en comparant la série du second membre aux développements de cos. x et sin. x donnés n° 109, on voit qu'elle revient à $\cos. x + \sqrt{-1}\sin x$. Donc

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sqrt{-1}\sin. x$$

et en changeant le signe de x,

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos. x - \sqrt{-1}\sin. x;$$

équations qui ont été données par Euler, et qui sont d'une grande importance dans l'analyse.

On en déduit immédiatement

$$\cos. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$
$$\sin. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

114. Les formules précédentes peuvent être regardées comme renfermant tous les résultats que l'on peut tirer de la considération des angles. En effet, si l'on multiplie l'une par l'autre les équations

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sqrt{-1}\sin. x$$
$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos. y + \sqrt{-1}\sin. y,$$

on trouvera

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}} = \cos.x \cos.y - \sin.x \sin.y + \sqrt{-1}\,(\cos.x \sin.y + \sin.x \cos.y).$$

Mais d'un autre côté

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}} = \cos.(x+y) + \sqrt{-1}\,\sin.(x+y):$$

donc, d'après ce qui a été dit n° 111,

$$\cos.(x+y) = \cos.x \cos.y - \sin.x \sin.y$$
$$\sin.(x+y) = \cos.x \sin.y + \sin.x \cos.y$$

formules dont on déduit toute la trigonométrie.

115. On peut former, au moyen des expressions de $\cos.x$ et $\sin.x$ en exponentielles imaginaires, celles de toutes les autres lignes trigonométriques. On a, par exemple,

$$\tang.x = \frac{\sin.x}{\cos.x} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}},$$

ou

$$\tang.x = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}.$$

On tire de cette équation

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1 + \sqrt{-1}\,\tang.x}{1 - \sqrt{-1}\,\tang.x},$$

et par conséquent

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\,\frac{1 + \sqrt{-1}\,\tang.x}{1 - \sqrt{-1}\,\tang.x}.$$

Donc, en développant le logarithme par la formule qui est

à la fin du n° 102, on a

$$x = \text{tang.}\, x - \frac{1}{3}\,\text{tang.}^3 x + \frac{1}{5}\,\text{tang.}^5 x - \frac{1}{7}\,\text{tang.}^7 x + \text{etc.}$$

Nous retrouvons ainsi la série de Leibnitz, qui a été donnée ci-dessus, n° 110.

116. Il importe de considérer d'ailleurs que les développements

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

$$\sin.\, x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$\cos.\, x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

subsistent lorsqu'on donne à l'arc x une valeur quelconque imaginaire $x = m + n\sqrt{-1}$. On peut vérifier, en effet, que la substitution de $m + n\sqrt{-1}$ à la place de x dans la première série, ou la multiplication des deux séries qui représentent respectivement les valeurs de e^m et $e^{n\sqrt{-1}}$ donnent le même résultat. On remarquera de même que

$$\sin.(m + n\sqrt{-1}) = \sin.\, m\,.\,\cos.\, n\sqrt{-1} + \cos.\, m\,.\,\sin.\, n\sqrt{-1}\,:$$

or si, après avoir formé les développements de $\sin.\, m$ et de $\cos.\, n\sqrt{-1}$, on les multiplie l'un par l'autre, et on les ajoute au produit des développements de $\cos.\, m$ et de $\sin.\, n\sqrt{-1}$, on trouvera le même résultat qu'en faisant $x = m + n\sqrt{-1}$ dans la série qui représente la valeur de $\sin.\, x$. On a également

$$\cos.(m + n\sqrt{-1}) = \cos.\, m\,.\,\cos.\, n\sqrt{-1} - \sin.\, m\,.\,\sin.\, n\sqrt{-1}\,;$$

et l'on reconnaît que la différence des produits des développements de cos. m et cos. $n\sqrt{-1}$, sin. m et sin. $n\sqrt{-1}$, donne le même résultat que la substitution de $m+n\sqrt{-1}$ à la place de x dans la série qui représente cos. x.

Il résulte de cette remarque que les équations posées dans les nos 113 et 114, qui expriment les relations existantes entre les fonctions exponentielles et trigonométriques, conviennent également aux cas où l'on attribuerait à la variable x la valeur imaginaire $m+n\sqrt{-1}$.

Formule de Moivre. Résolution des équations binômes.

117. Reprenons l'équation du n° 113

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sqrt{-1}\sin. x,$$

dans laquelle x représente un nombre quelconque, et où l'on peut attribuer indifféremment le signe + ou le signe — au radical $\sqrt{-1}$. Si l'on écrit mx au lieu de x, m désignant aussi un nombre constant quelconque (pourvu qu'il soit réel), il viendra

$$e^{mx\sqrt{-1}} = \cos. mx + \sqrt{-1}\sin. mx.$$

Mais si l'on élève les deux membres de l'équation précédente à la puissance m, on aura

$$e^{mx\sqrt{-1}} = (\cos. x + \sqrt{-1}\sin. x)^m.$$

Donc

$$(\cos. x + \sqrt{-1}\sin. x)^m = \cos. mx + \sqrt{-1}\sin. mx,$$

formule très-importante dans l'analyse, qui a été donnée par Moivre.

D'après ce qui précède, cette formule se trouve démontrée, quelle que soit la valeur de l'exposant m. On peut y parvenir bien simplement dans le cas où m est un nombre entier positif en formant les puissances successives de $\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x$. En effet, on a évidemment

$$(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^2 = \cos.^2 x + 2\sqrt{-1} \sin. x \cos. x - \sin.^2 x,$$

d'où résulte

$$(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^2 = \cos. 2x + \sqrt{-1} \sin. 2x :$$

on a de même

$$(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^3 = (\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)(\cos. 2x + \sqrt{-1} \sin. 2x),$$

d'où l'on tire, en développant

$$(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^3 = \cos. 3x + \sqrt{-1} \sin. 3x,$$

et ainsi de suite.

118. La formule de Moivre donne immédiatement l'expression des racines des équations

$$x^n - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^n + 1 = 0,$$

n étant un nombre entier. Supposons, en effet,

$$x = \rho(\cos. \varphi + \sqrt{-1} \sin. \varphi),$$

ρ étant > 0 et φ désignant un angle quelconque. On aura donc

$$x^n = \rho^n(\cos. n\varphi + \sqrt{-1} \sin. n\varphi);$$

et, en substituant dans l'équation $x^n - 1 = 0$,

$$\rho^n(\cos. n\varphi + \sqrt{-1}\sin. n\varphi) - 1 = 0.$$

Cette dernière équation ne peut être satisfaite, d'après ce qui a été dit n° 111, qu'autant que l'on aura séparément

$$\rho^n \cos. n\varphi - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \sin. n\varphi = 0\,; \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{2i\pi}{n} \text{ et } \rho = 1,$$

i désignant un nombre entier quelconque. Donc

$$x = \cos. \frac{2i\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin. \frac{2i\pi}{n},$$

expression qui doit donner toutes les racines réelles et imaginaires de l'équation $x^n - 1 = 0$. En effet, faisant $i = 0$, on a d'abord $x = 1$, ce qui est la racine réelle que cette équation donne nécessairement : faisant encore $i = 2$, $i = 3$, $i = 4$, etc., jusqu'à $i = n - 1$, on aura $n - 1$ autres racines différentes, qui toutes appartiennent à la proposée. En faisant $i = n$, on retrouve la racine réelle $x = 1$. En faisant $i = n + 1$, on retrouve la même racine qui avait été donnée par la supposition de $i = 2$; et ainsi des autres. Ainsi la formule précédente exprime bien les n racines réelles ou imaginaires de l'équation $x^n - 1 = 0$, et seulement ces n racines, qui répondent aux premières valeurs de i depuis 0 jusqu'à $n - 1$ inclusivement. Nous remarquerons d'ailleurs que dans le cas où le nombre n est pair, l'expression générale des racines donne, en faisant $i = \frac{n}{2}$, $x = -1$, c'est-à-dire la seconde racine réelle qui appartient alors à l'équation proposée.

Les racines de l'équation $x^n - 1 = 0$ ou $x^n = 1$, qui sont exprimées respectivement d'après ce qui précède par

$$x = \cos.\frac{0.\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin.\frac{0.\pi}{n}$$

$$x = \cos.\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin.\frac{2\pi}{n}$$

$$x = \cos.\frac{4\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin.\frac{4\pi}{n}$$

$$x = \cos.\frac{6\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin.\frac{6\pi}{n}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$x = \cos.\frac{2(n-1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin.\frac{2(n-1)\pi}{n},$$

sont appelées *racines de l'unité.*

119. Si l'on substitue l'expression

$$x = \rho(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi)$$

dans l'équation $x^n + 1 = 0$, on trouve de même

$$\rho^n(\cos.n\varphi + \sqrt{-1}\sin.n\varphi) + 1 = 0,$$

équation qui ne peut être satisfaite qu'autant que l'on a séparément

$$\rho^n\cos.n\varphi + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \sin.n\varphi = 0; \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{(2i+1)\pi}{n} \text{ et } \rho = 1,$$

i désignant toujours un nombre entier. Donc, l'expression

$$x = \cos.\frac{(2i+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin.\frac{(2i+1)\pi}{n}$$

doit donner toutes les racines de l'équation $x^n + 1 = 0$.

En faisant successivement $i=0, i=1, i=2$, etc., jusqu'à $i=n-1$, on trouve effectivement, comme dans le cas précédent, n valeurs différentes qui sont les n racines demandées. Et si l'on supposait ensuite $i=n, i=n+1$, $i=n+2$, etc., ces mêmes valeurs se reproduiraient successivement dans le même ordre. Lorsque le nombre n est pair, les racines dont il s'agit sont toutes imaginaires; mais s'il est impair, l'expression générale des racines donne, en faisant $i=\frac{n-1}{2}$, $x=-1$, c'est-à-dire la racine réelle unique qui appartient alors à l'équation proposée.

120. Ces résultats deviendront plus sensibles si l'on remarque que la circonférence du cercle (*fig.* 25) ayant été partagée à partir de l'extrémité 0 du diamètre en $2n$ parties égales, on trouvera, en considérant les points de division 0, 2, 4, 6, 8, etc., de numéro pair, les arcs auxquels appartiennent les cosinus et sinus qui entrent dans l'expression des racines de l'équation $x^n-1=0$; et qu'en considérant les points de division 1, 3, 5, 7, 9, etc., de numéro impair, on trouvera également les arcs auxquels appartiennent les cosinus et sinus qui entrent dans l'expression des racines de l'équation $x^n+1=0$.

121. Remarquons que les différents angles compris dans les expressions $\frac{2i\pi}{n}$ ou $\frac{(2i+1)\pi}{n}$ sont toujours tels que le même cosinus, et des sinus égaux et de signes contraires, appartiennent à deux de ces angles. L'ambiguïté du signe radical $\sqrt{-1}$ exige en effet que chaque racine de l'équation $x^n-1=0$ puisse également être exprimée par

$$x=\cos.\frac{2i\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{n}$$

et par

$$x = \cos.\frac{2i\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{n}.$$

Or, si l'on multiplie l'un par l'autre les deux facteurs du premier degré

$$x - \cos.\frac{2i\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{n} \text{ et } x - \cos.\frac{2i\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{n},$$

on trouve pour résultat l'expression réelle

$$x^2 - 2x\cos.\frac{2i\pi}{n} + 1,$$

qui représente d'une manière générale les facteurs du second degré appartenant à l'expression $x^n - 1$. En effet, si l'on attribue à i, dans cette expression, toutes les valeurs entières qui ne surpassent pas $\frac{n}{2}$, et si on l'égale à zéro, on aura autant d'équations du second degré qui donneront les racines simples de la proposée. Il faut remarquer toutefois qu'en faisant $i = 0$, l'expression dont il s'agit devient $x^2 - 2x + 1$, ou $(x-1)(x-1)$. Cependant on ne devrait prendre que le facteur simple $x - 1$, si l'on voulait reproduire la proposée par la multiplication des facteurs correspondant à ses racines. De même, en faisant $i = \frac{n}{2}$, lorsque n est un nombre pair, l'expression précédente devient $x^2 + 2x + 1$, ou $(x+1)(x+1)$, et néanmoins on ne doit compter que le seul facteur simple $x + 1$.

On verra de la même manière que les racines imaginaires de l'équation $x^n + 1 = 0$, multipliées deux à deux, pro-

duisent des facteurs réels du second degré, dont l'expression générale est

$$x^2 - 2x \cos. \frac{(2i+1)\pi}{n} + 1,$$

et donne lieu à des remarques semblables aux précédentes.

122. Les résultats auxquels on vient de parvenir s'appliquent évidemment aux équations, telles que

$$x^n - a = 0 \quad \text{ou} \quad x^n + a = 0,$$

a désignant un nombre quelconque; car, en faisant $\frac{x}{\sqrt[n]{a}} = y$, elles reviennent à $y^n - 1 = 0$ et $y^n + 1 = 0$. On voit donc que la racine n^{me} du nombre quelconque a présente généralement n valeurs, qui sont égales au produit de la valeur arithmétique $\sqrt[n]{a}$ multipliée par les n racines de l'unité; c'est-à-dire que l'on doit concevoir, afin de donner aux expressions la généralité que comporte l'analyse, la racine n^{me} de $+a$ représentée par l'expression

$$\sqrt[n]{a}\left(\cos. \frac{2i\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin. \frac{2i\pi}{n}\right);$$

et de même la racine n^{me} de $-a$ représentée par l'expression

$$\sqrt[n]{a}\left(\cos. \frac{(2i+1)\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin. \frac{(2i+1)\pi}{n}\right).$$

On obtiendra les n valeurs cherchées en attribuant successivement à i les valeurs entières 0, 1, 2, 3.....$n-1$. Quand il s'agit de $\sqrt[n]{+a}$, il n'existe qu'une seule valeur réelle $\sqrt[n]{a}$, si n est impair; et deux valeurs réelles $\pm\sqrt[n]{a}$, si n est pair. Quand il s'agit de $\sqrt[n]{-a}$, il existe une seule valeur

réelle $-\sqrt[n]{a}$, si n est impair; et il n'existe aucune valeur réelle si n est pair.

123. L'obligation qui nous est imposée de considérer dans tous les cas l'expression $\sqrt[n]{a}$, a désignant un nombre quelconque positif ou négatif, comme présentant un nombre n de valeurs distinctes réelles ou imaginaires, donne lieu à faire quelques remarques nécessaires pour l'interprétation générale de la formule de Moivre, présentée n° 117,

$$(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^m = \cos. mx + \sqrt{-1} \sin. mx.$$

Tant que le nombre m est entier, chaque membre de l'équation a une valeur unique, et ces deux valeurs sont identiques, comme on s'en assure en formant la puissance m de $\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x$ par la multiplication. Mais si l'exposant m est une fraction $\frac{1}{q}$ ou plus généralement un nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$ (p et q désignant des nombres entiers premiers entre eux), le premier membre doit, d'après ce qui précède, présenter q valeurs distinctes. Or on mettra ces valeurs en évidence si l'on introduit dans le second membre le facteur $\cos. \frac{2i\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin. \frac{2i\pi}{q}$ qui donne les q racines de l'unité, en y attribuant à i un nombre q de valeurs entières consécutives quelconques. Nous écrirons donc

$$(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^{\frac{p}{q}} = \left(\cos. \frac{p}{q} x + \sqrt{-1} \sin. \frac{p}{q} x\right) \left(\cos. \frac{2i\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin. \frac{2i\pi}{q}\right);$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^{\frac{p}{q}} = \left(\cos. \frac{px + 2i\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin. \frac{px + 2i\pi}{q}\right);$$

ou enfin, puisque p étant un nombre entier on peut écrire pi au lieu de i,

$$(\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x)^{\frac{p}{q}}=\cos.\frac{p}{q}(x+2i\pi)+\sqrt{-1}\sin.\frac{p}{q}(x+2i\pi).$$

Ainsi tout se réduit pour obtenir les q valeurs que doit présenter le second membre de l'équation

$$(\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x)^{\frac{p}{q}}=\cos.\frac{p}{q}x+\sqrt{-1}\sin.\frac{p}{q}x,$$

à concevoir que l'on augmente successivement l'angle x des multiples 0, 1, 2, 3,.....$q-1$ de la circonférence 2π.

124. Les résultats précédents donnent également la résolution des équations de la forme

$$x^{2n}+ax^n+b=0.$$

En effet, en prenant d'abord la valeur de x^n, on a

$$x^n=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b};$$

et si le second membre est réel, il reste simplement à résoudre l'équation

$$x^n+\frac{a}{2}\mp\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=0,$$

semblable à celle du n° 122.

Si le second membre est imaginaire, c'est-à-dire si b étant positif a^2 est $<4b$, l'équation proposée, en posant $\cos.g=\sqrt{\frac{a^2}{4b}}$ et $y=\frac{x}{\sqrt[2n]{b}}$, peut être remplacée par l'une

ou l'autre des deux équations suivantes :

$$y^{2n} - 2\cos.g.y^n + 1 = 0,$$
$$y^{2n} + 2\cos.g.y^n + 1 = 0,$$

selon que le second terme est négatif ou positif. En considérant d'abord le premier cas, et substituant dans l'équation

$$y^{2n} - 2\cos.g.y^n + 1 = 0$$

l'expression

$$y = \rho(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi),$$

où ρ est essentiellement positif, il vient

$$\rho^{2n}(\cos.2n\varphi + \sqrt{-1}\sin.2n\varphi) - 2\rho^n\cos.g(\cos.n\varphi + \sqrt{-1}\sin.n\varphi) + 1 = 0;$$

c'est-à-dire

$$\rho^{2n}\cos.2n\varphi - 2\rho^n\cos.g.\cos.n\varphi + 1 = 0$$
$$\rho^{2n}\sin.2n\varphi - 2\rho^n\cos.g.\sin.n\varphi = 0,$$

à cause de $\sin.2n\varphi = 2\sin.n\varphi\cos.n\varphi$, la dernière équation donne

$$\rho^n = \frac{\cos.g}{\cos.n\varphi},$$

valeur que je substitue dans le second membre de la première équation mise sous la forme

$$\frac{1}{\rho^n} = 2\cos.g\cos.n\varphi - \rho^n\cos.2n\varphi.$$

Je trouve ainsi $\frac{1}{\rho^n} = \frac{\cos.g}{\cos.n\varphi}$, d'où résulte $\rho^n = \frac{1}{\rho^n}$ ou $\rho = 1$, puis

$$\cos.n\varphi = \cos.g, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varphi = \frac{2i\pi \pm g}{n},$$

rs un nombre entier quelconque. Les ra-
ont donc représentées par l'expression

$$\text{os.}\ \frac{2i\pi \pm g}{n} + \sqrt{-1}\ \text{sin.}\ \frac{2i\pi \pm g}{n},$$

donnera à i toutes les valeurs entières
n. Les facteurs réels du second degré
ation dont il s'agit sont représentés par

$$-2y\ \text{cos.}\ \frac{2i\pi \pm g}{n} + 1.$$

nsuite le second cas, et substituant dans

$$^{2n} + 2\ \text{cos.}\ g.\ y^n + 1 = 0$$

$$= (\text{cos.}\ \varphi + \sqrt{-1}\ \text{sin.}\ \varphi),$$

$= 1$, puis

$$\text{os.}\ g\ ; \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{(2i+1)\pi \pm g}{n}.$$

; exprimées par

$$\frac{+1)\pi \pm g}{n} + \sqrt{-1}\ \text{sin.}\ \frac{2i\pi \pm g}{n};$$

1 second degré par

$$y\ \text{cos.}\ \frac{(2i+1)\pi \pm g}{n} + 1.$$

tion des équations à deux termes en
nier et du second degré correspond à
étrique très-remarquable, connue sous

le nom de *Théorème de Cotes*, qui l'a donné le premier. A étant le centre d'un cercle (*fig.* 26 et 27) dont le rayon est égal à l'unité, soit portée sur un diamètre la distance $AB = x$. Soit un angle quelconque 0B1 compté à partir de ce diamètre, et désigné par φ. Appelons y la distance B1. On aura évidemment

$$y = \sqrt{(\cos.\varphi - x)^2 + \sin.\varphi^2}$$

et

$$y^2 = x^2 - 2x\cos.\varphi + 1.$$

Cela posé, imaginons que l'on ait partagé à partir du point 0 la circonférence 2π en un nombre $2n$ de parties égales, et désignons respectivement par $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots y_{2n-1}$ les longueurs des lignes B0, B1, B2, B3, etc. En attribuant successivement à l'angle φ dans l'expression précédente de y^2 les valeurs $\frac{0.\pi}{n}, \frac{1.\pi}{n}, \frac{2.\pi}{n}, \frac{3.\pi}{n}, \ldots \frac{(2n-1)\pi}{n}$ cette expression donnera

$$y_0^2 = x^2 - 2x\cos.\frac{0.\pi}{n} + 1$$

$$y_1^2 = x^2 - 2x\cos.\frac{1.\pi}{n} + 1$$

$$y_2^2 = x^2 - 2x\cos.\frac{2.\pi}{n} + 1$$

$$y_3^2 = x^2 - 2x\cos.\frac{3.\pi}{n} + 1$$

$$y_4^2 = x^2 - 2x\cos.\frac{4.\pi}{n} + 1$$

$$y_5^2 = x^2 - 2x\cos.\frac{5.\pi}{n} + 1$$

. . . . . .

. . . . . .

$$y^2_{2n-2} = x^2 - 2x\cos.\frac{(2n-2)\pi}{n} + 1$$

$$y^2_{2n-1} = x^2 - 2x\cos.\frac{(2n-1)\pi}{n} + 1.$$

u'en prenant respectivement les y^1 de
y^2 de numéro impair, nous avons ici
nd degré des fonctions $x^n - 1$ et $x^n + 1$
générales ont été données n° 121. On
divisions également éloignées des extré-
AB donnent pour y des valeurs identi-
a toujours $y_{n-1} = y_{n+1}$, $y_{n-2} = y_{n+2}$, etc.
ue, d'après ce qui a été dit dans le nu-
t prendre qu'une fois les facteurs simples
urs du second degré qui répondent aux
acés aux extrémités du diamètre. D'après
ment

$$= y_0 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot \cdots\cdots y_{2n-2}$$
$$= y_1 \cdot y_3 \cdot y_5 \cdot y_7 \cdot \cdots\cdots y_{2n-1},$$

nent l'énoncé du théorème de Cotes.
était faite dans un cercle dont le rayon
t aux lignes de la figure leurs rapports
du cercle à l'unité, et x à $\frac{x}{\rho}$. Donc on

$$= y_0 \cdot y_2 \cdot y_4 \cdot y_6 \cdot \cdots\cdots y_{2n-2}$$
$$= y_1 \cdot y_3 \cdot y_5 \cdot y_7 \cdot \cdots\cdots y_{2n-2},$$

résentant dans ces dernières équations
gnes B0, B1, B2, etc., dans le cercle

tion semblable s'applique à la décom-
les équations $x^{2n} - 2\cos.g.x^n + 1 = 0$
$- 1 = 0$, dont on s'est occupé n° 124.
ns des facteurs réels du second degré
ces équations, et qui ont été données

dans le numéro cité, on reconnaît que les carrés des lignes B0, B1, B2, etc., représenteront ces facteurs, pourvu qu'au lieu de diviser la circonférence en $2n$ parties égales, à partir de l'extrémité C du diamètre sur lequel est portée la distance $A\beta = x$, on commence cette division (fig. 28) à partir du point 0, après avoir porté l'arc $C0 = \frac{g}{n}$. Ainsi, en désignant toujours par y_0, y_1, y_2, y_3, etc., les lignes B0, B1, B2, B3, etc., on a également

$$x^{2n} - 2\cos.g.x^n + 1 = y_0 \cdot y_2 \cdot y_4 \cdot y_6 \cdot \ldots\ldots y_{2n-2}$$
$$x^{2n} + 2\cos.g.x^n + 1 = y_1 \cdot y_3 \cdot y_5 \cdot y_7 \cdot \ldots\ldots y_{2n-1}.$$

Cette dernière proposition, dont la précédente n'est qu'un cas particulier, a été donnée par Moivre.

Remarques sur les expressions imaginaires. Expressions générales des logarithmes et des sinus et cosinus.

127. Les propriétés des expressions imaginaires sont uniquement fondées sur les notions exposées aux n^{os} **111** et **112**, et sur l'identité des expressions $e^{x\sqrt{-1}}$ et $\cos.x + \sqrt{-1}\ \sin.x$ qui a été remarquée dans le n° **113**, et qui conduit immédiatement à la formule de Moivre donnée n° **117**. Nous nous bornerons ici aux remarques les plus simples sur ce sujet.

Les propriétés principales des fonctions simples x^m, $\log.x$, a^x, $\sin.x$ ou $\cos.x$, subsistent également lorsqu'on donne à la variable x une valeur imaginaire.

La nature de la fonction x^m consiste en ce que l'on a $x^m x^n = x^{m+n}$. Or, en posant

$$x = s(\cos.t + \sqrt{-1}\ \sin.t),$$

$\overline{-1}$ sin. $t)^m = s^m(\cos. mt + \sqrt{-1}$ sin. $mt)$
$\overline{-1}$ sin. $t)^n = s^n(\cos. nt + \sqrt{-1}$ sin. $nt)$

$n + n)t + \sqrt{-1}$ sin. $(m + n)t) = x^{m+n}$.

a^x doit également donner $a^x a^y = a^{x+y}$.
ujours considérer à la place de a^x la
nt $a^x = e^v$, et prenant de part et d'autre
riens, il vient $xla = v$; en sorte qu'il
par la pour changer a^x en e^x. Mais en
$\overline{-1}$, et $y = p + q\sqrt{-1}$, nous avons

$e^m . e^{n\sqrt{-1}} = e^m(\cos. n + \sqrt{-1}$ sin. $n)$
$e^p . e^{q\sqrt{-1}} = e^p(\cos. q + \sqrt{-1}$ sin. $q)$.

$(n + q) + \sqrt{-1}$ sin. $(n + q)) = e^{x+y}$.

s que la transformation de a^x en e^x,
x par la, suppose que la soit un nom-
gné, c'est-à-dire que a soit un nombre
riété de la fonction a^x dont il s'agit ne
estriction, lorsqu'on veut attribuer au
négatives ou imaginaires.

logarithmes consiste en ce que l'on a
$. x +$ log. y. Cette équation subsistera
aux variables x, y des valeurs quel-
aginaires, pourvu que la base a du
soit toujours un nombre réel et positif,
i a été dit n° 64. En effet, nous pou-

vons considérer lx à la place de $\log. x$, puisque, d'après le n° 104, il suffit de multiplier $\log. x$ par la pour le changer en lx. Or, en posant $x = s(\cos. t + \sqrt{-1} \sin. t)$, $y = u(\cos. v + \sqrt{-1} \sin. v)$, et se rappelant que, d'après le n° 113, $e^{t\sqrt{-1}} = \cos. t + \sqrt{-1} \sin. t$, d'où $t\sqrt{-1} = l(\cos. t + \sqrt{-1} \sin. t)$, nous aurons

$$lx = ls + t\sqrt{-1}$$
$$ly = lu + v\sqrt{-1},$$

d'où

$$lx + ly = l. su + (t + v)\sqrt{-1} = l. xy.$$

130. Remarquons d'ailleurs qu'en multipliant par h les deux membres de l'équation $e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sqrt{-1} \sin. x$, h désignant un nombre réel quelconque, puis, prenant les logarithmes népériens des deux membres, nous avons

$$lh + x\sqrt{-1} = l[h(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)].$$

Or, l'expression $h(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)$ peut, d'après le n° 112, représenter un nombre imaginaire quelconque $m + n\sqrt{-1}$; d'où l'on conclut que l'équation précédente donne l'expression générale du logarithme népérien des nombres imaginaires. Ce logarithme est égal au logarithme népérien du module h, auquel est ajouté le terme $x\sqrt{-1}$.

De plus, l'expression $h(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)$ représentera également un nombre réel quelconque positif lorsqu'on y supposera l'arc $x = 2i\pi$, i désignant un nombre entier; et un nombre réel quelconque négatif lorsqu'on y supposera $x = (2i + 1)\pi$. On a donc respectivement

$$lh + 2i\pi\sqrt{-1}$$
$$lh + (2i + 1)\pi\sqrt{-1}$$

générales des logarithmes népériens du
du nombre négatif $-h$. Ces expressions
;, parce qu'elles satisfont aux équations
$= l.xy$ qui résultent immédiatement de
onction logarithmique. On voit que le
ombre positif a une seule valeur réelle
mais que le logarithme d'un nombre
aleurs imaginaires.
précédente du logarithme d'un nombre
équation

$$\frac{1}{2}\left(z^{\frac{1}{r}}-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(z^{\frac{1}{r}}-1\right)^3-\text{etc.}\Big]$$

)3. En effet, si l'on suppose le nombre r
e équation se réduit à

$$lz = r\left(z^{\frac{1}{r}}-1\right).$$

conserver toute sa généralité, y con-
au n° 122, $z^{\frac{1}{r}}$ comme représentant le
arithmétique $\sqrt[r]{z}$ par les r racines de
écrire, avec la condition de faire r

$$\text{os.}\frac{2i\pi}{r}+\sqrt{-1}\sin.\frac{2i\pi}{r}\Big)-1\Big],$$

$$\frac{2i\pi}{r}-1\Big)+\sqrt{-1}.\sqrt[r]{z}.r\sin.\frac{2i\pi}{r}.$$

t grand, on peut remplacer dans le
nd membre $\text{cos.}\frac{2i\pi}{r}$ par l'unité; et

dans le second terme $\sqrt[r]{z}$ par l'unité, $r \sin. \frac{2i\pi}{r}$ par $2i\pi$. Ce second membre se réduit donc à

$$r\left(\sqrt[r]{z}-1\right)+2i\pi\sqrt{-1}, \text{ c'est-à-dire } lz+2i\pi\sqrt{-1}.$$

S'il s'agissait d'un nombre négatif, on verrait de la même manière que les racines $r^{\text{èmes}}$ de $-z$ étant exprimées généralement, d'après le n° 122, par $\sqrt[r]{z}\left(\cos. \frac{(2i+1)\pi}{r} + \sqrt{-1} \sin. \frac{(2i+1)\pi}{r}\right)$, l'équation précédente donne pour l'expression de $l(-z)$

$$lz + (2i+1)\pi\sqrt{-1}.$$

132. En faisant $i=0$ dans l'équation

$$l(-1)=(2i+1)\pi\sqrt{-1},$$

on trouve $\pi=\frac{l(-1)}{\sqrt{-1}}$, expression singulière du nombre π qui a été donnée par Jean Bernouilli. On a d'ailleurs plus généralement $\pi=\frac{l(-1)}{(2i+1)\sqrt{-1}}$. Les équations de cette nature sont des conséquences immédiates de la relation qui existe entre les développements des fonctions e^x, sin. x et cos. x, et s'interprètent sans difficulté d'après cette remarque.

133. On reconnaît également que les propriétés essentielles des fonctions trigonométriques sin. x et cos. x, qui sont exprimées par les équations

$\cdot y) = \sin. x \cos. y + \sin. y \cos. x$
$\cdot y) = \cos. x \cos. y - \sin. x \sin. y,$

ent aux cas où les variables x et y son
es et remplacées respectivement par les
$\sqrt{-1}$ et $p + q\sqrt{-1}$. Il suffit, pour en
appeler les remarques qui ont été faites
16.
d'ailleurs connaître les expressions géné-
u cosinus d'un arc quelconque réel ou
rquera que

$$: \cos. m. \cos. n\sqrt{-1} - \sin. m. \sin. n\sqrt{-1}$$
$$: \sin. m. \cos. n\sqrt{-1} + \cos. m. \sin. n\sqrt{-1}.$$

de $\cos. x$ et $\sin. x$ en exponentielles
n° 113, et qui conviennent, d'après le
l'on attribuerait à x la valeur imagi-
nt

$$\frac{e^{-n}+e^{n}}{2}, \quad \sin. n\sqrt{-1} = \frac{e^{-n}-e^{n}}{2\sqrt{-1}}.$$

$$\frac{e^{-n}+e^{n}}{2} \cos. m - \sqrt{-1}. \frac{e^{-n}-e^{n}}{2} \sin. m$$
$$\frac{e^{-n}+e^{n}}{2} \sin. m + \sqrt{-1}. \frac{e^{-n}-e^{n}}{2} \cos. m.$$

pas ici plus d'étendue à ces notions,
nent que toutes les relations analyti-
établies entre les quantités réelles et
nt être admises qu'autant qu'elles
et interprétées au moyen des équa-

tions fondamentales qui ont été données au commencement de cet article, et qui reposent elles-mêmes sur l'identité des développements en séries toujours convergentes des expressions $e^{x\sqrt{-1}}$ et $\cos.x + \sqrt{-1}\sin.x$.

On a vu d'ailleurs par les remarques précédentes que les fonctions simples de la quantité imaginaire $m + n\sqrt{-1}$ se transformaient toutes dans des expressions de la forme $P + Q\sqrt{-1}$. On en conclura que la même chose doit arriver pour les fonctions composées de celles-ci. Il en est de même à l'égard des fonctions inverses, telles que arc sin. x ou arc cos. x; et en général on admet que toute fonction formée de quantités imaginaires peut se ramener à la forme $P + Q\sqrt{-1}$, P et Q désignant des quantités réelles.

Expressions des puissances du cosinus et du sinus d'un arc en fonction des cosinus ou des sinus des arcs multiples.

136. Les géomètres ont donné plusieurs séries au moyen desquelles les cosinus ou sinus des arcs multiples sont exprimés en fonction des puissances du cosinus et du sinus de l'arc simple, et réciproquement. La discussion et l'interprétation exacte de ces formules exigent l'application des notions qui ont été présentées n°s 111 et suivants, et l'on peut voir sur ce sujet les *Leçons sur le calcul des fonctions* de Lagrange (10e et 11e leçon), et l'ouvrage de M. Poinsot intitulé: *Recherches sur l'analyse des sections angulaires*. On se bornera à présenter ici les expressions suivantes, dont l'usage est utile dans le calcul intégral, en se bornant même au cas des puissances entières et positives du sinus et du cosinus.

sin. $x = u$, d'où $2\cos.x = u+v$

sin. $x = v$, $2\sqrt{-1}\sin.x = u-v$,

la puissance m de $u+v$ par le binôme de
osant d'abord que m soit un nombre entier
ic

$$^{m}+mu^{m-1}v+\frac{m(m-1)}{2}u^{m-2}v^{2}+\ldots\ldots+v^{m};$$

nt que $uv=1$,

$$u^{m}+mu^{m-2}+\frac{m(m-1)}{2}u^{m-4}+\ldots\ldots+v^{m}.$$

l'ailleurs généralement par le théorème de
$u^{m}=\cos.\,mx+\sqrt{-1}\sin.\,mx$, cette équa-
e

$$mx+m\cos.(m-2)x+\frac{m(m-1)}{2}\cos.(m-4)x+$$
$$+\ldots\ldots+\cos.\,mx$$
$$mx+m\sin.(m-2)x+\frac{m(m-1)}{2}\sin.(m-4)x+$$
$$+\ldots\ldots-\sin.\,mx\Big).$$

ne la première ligne présente des termes qui
deux à deux, à l'exception d'un seul, dans
pair. Quant à la suite qui forme la seconde
oujours formée de termes qui se détruisent
. Ainsi l'on a simplement dans le cas dont

il s'agit; 1° si l'exposant m est pair

$$(2\cos.x)^m=2\left[\cos.mx+m\cos.(m-2)x+\frac{m(m-1)}{2}\cos.(m-4)x+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)\ldots\ldots\frac{m}{2}}{2.3\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}\cos.2x\right]+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{2.3.4\ldots\ldots\frac{m}{2}}.$$

2° si l'exposant est impair

$$(2\cos.x)^m=2\left[\cos.mx+m\cos.(m-2)x+\frac{m(m-1)}{2}\cos.(m-4)x+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)\ldots\ldots\frac{m-3}{2}}{2.3\ldots\frac{m-1}{2}}\cos.x\right].$$

137. Une analyse semblable donnera l'expression des puissances du sinus. En développant la puissance m de $u-v$ dans le cas de m entier et positif, on a

$$(\sqrt{-1}.2\sin.x)^m=u^m-mu^{m-1}v+\frac{m(m-1)}{2}u^{m-2}v^2-\ldots\ldots\pm v^m$$

ou parce que $uv=1$,

$$(\sqrt{-1}.2\sin.x)^m=u^m-mu^{m-2}+\frac{m(m-1)}{2}u^{m-4}-\ldots\ldots\pm v^m.$$

Les signes $+$ ou $-$ ont lieu respectivement lorsque m est pair ou impair. Mettant ensuite pour u^m l'expression $\cos.mx+\sqrt{-1}\sin.mx$, il vient

$$-\cos.(m-2)x+\frac{m(m-1)}{2}\cos.(m-4)x-$$
$$-\ldots\ldots\pm\cos.mx$$
$$-m\sin.(m-2)x+\frac{m(m-1)}{2}\sin.(m-4)x-$$
$$-\ldots\ldots\pm\sin.mx\Big).$$

; pair la seconde ligne se réduit a zéro,

$$x-m\cos.(m-2)x+\frac{m(m-1)}{2}\cos.(m-4)x-\ldots\pm$$

$$\text{os.}2x\Big]\mp\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{2.3.4\ldots\ldots\frac{m}{2}}.$$

ır et inférieur ont lieu respectivement
ultiple de 4 ou un multiple de 2.
m est impair, la seconde ligne se réduit

$$mx-m\sin.(m-2)x+\frac{m(m-1)}{2}\sin.(m-4)x-\ldots\pm$$

$$\frac{n(m-1)\ldots\ldots\frac{m-3}{2}}{2.3.\ldots\frac{m-1}{2}}\cos.x\Big].$$

ieur et inférieur ont lieu respectivement
multiple de 4 ou un multiple de 2 augmen-

XIII. EXTENSION DE LA FORMULE DE TAYLOR AUX FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

138. Considérons la fonction

$$z = f(x, y),$$

dans laquelle x et y représentent deux variables indépendantes. On suppose que ces variables prennent respectivement les valeurs $x+h$, $y+i$, et il s'agit d'obtenir le développement de la valeur que prendra la fonction, c'est-à-dire de $f(x+h, y+i)$, ordonné suivant les puissances des quantités h et i. Pour y parvenir, on posera $h = \alpha\xi$ et $i = \alpha\eta$, et considérant la quantité $f(x+\alpha\xi, y+\alpha\eta)$ comme une fonction du nombre quelconque α, on écrira

$$F(\alpha) = f(x + \alpha\xi, y + \alpha\eta).$$

Or, on peut développer $F(\alpha)$ suivant les puissances de α au moyen du théorème donné au n° 86. Nous prendrons donc successivement les coefficients différentiels des divers ordres de $F(\alpha)$, qui seront exprimés ainsi qu'il est aisé de le reconnaître, par

$$F'(\alpha) = \frac{df}{dx}\xi + \frac{df}{dy}\eta,$$

$$F''(\alpha) = \frac{d^2f}{dx^2}\xi^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}\xi\eta + \frac{d^2f}{dy^2}\eta^2,$$

$$F'''(\alpha) = \frac{d^3f}{dx^3}\xi^3 + 3\frac{d^3f}{dx^2dy}\xi^2\eta + 3\frac{d^3f}{dxdy^2}\xi\eta^2 + \frac{d^3f}{dy^3}\eta^3,$$

etc.

en écrivant, pour abréger, f au lieu de $f(x+\alpha\xi, y+\alpha\eta)$.

es valeurs de ces coefficients $\alpha = 0$, ce

η,

$$\frac{d^2z}{dxdy}\xi\eta + \frac{d^2z}{dy^2}\eta^2$$

$$\frac{d^3z}{dx^2dy}\xi^2\eta + 3\frac{d^3z}{dxdy^2}\xi\eta^2 + \frac{d^3z}{dy^3}\eta^3$$

appliquant la règle du numéro cité,

$$\begin{array}{l|l|l}
\frac{d^2z}{dx^2}\xi^2 & \frac{\alpha^2}{2} + \frac{d^3z}{dx^3}\xi^3 & \frac{\alpha^2}{2.3} + \text{etc.}, \\
2\frac{d^2z}{dxdy}\xi\eta & \quad + 3\frac{d^3z}{dx^2dy}\xi^2\eta & \\
\frac{d^2z}{dy^2}\eta^2 & \quad + 3\frac{d^3z}{dxdy^2}\xi\eta^2 & \\
 & \quad + \frac{d^3z}{dy^3}\eta^3 &
\end{array}$$

$\alpha\xi$ par h et $\alpha\eta$ par i,

$$\frac{dz}{dx}h + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \frac{d^4z}{dx^4}\frac{h^4}{2.3.4} + \text{etc.},$$

$$\frac{dz}{dy}i + \frac{d^2z}{dxdy}hi + \frac{d^3z}{dx^2dy}\frac{h^2i}{2} + \frac{d^4z}{dx^3dy}\frac{h^3i}{2.3}$$

$$+ \frac{d^2z}{dy^2}\frac{i^2}{2} + \frac{d^3z}{dxdy^2}\frac{hi^2}{2} + \frac{d^4z}{dx^2dy^2}\frac{h^2i^2}{2.2}$$

$$+ \frac{d^3z}{dy^3}\frac{i^3}{2.3} + \frac{d^4z}{dxdy^3}\frac{hi^3}{2.3}$$

$$+ \frac{d^4z}{dy^4}\frac{i^4}{2.3.4}$$

ont la loi est évidente. Le second terme est omplète du premier ordre de la fonction z, la place de dx et i à la place de dy. Le troi-

sième terme est sa différentielle du second ordre, où l'on a fait les mêmes changements, divisée par 2. Le quatrième terme est sa différentielle complète du troisième ordre, où l'on a fait les mêmes changements, divisée par 2.3; et ainsi de suite.

Les notions précédentes s'étendront sans difficulté aux cas où la fonction proposée contiendrait plus de deux variables indépendantes, et où l'on supposerait que ces diverses variables subissent toutes des accroissements. Les termes successifs du développement sont toujours les différentielles complètes du 1er, 2e, 3e, 4e, etc., ordres de la fonction proposée, où l'on a remplacé la différentielle de chaque variable par la quantité dont on la suppose augmentée, et qui sont divisés respectivement par 1,2,2.3,2.3.4, etc.

139. La formule précédente donne également le développement de la fonction $z=f(x,y)$ suivant les puissances de x et y. En y faisant $x=0$ et $y=0$; puis écrivant x à la place de h, et y à la place de i, il vient

$$\begin{aligned} f(x,y)=z_0+\frac{dz_0}{dx}x+\frac{d^2z_0}{dx^2}\frac{x^2}{2}+\frac{d^3z_0}{dx^3}\frac{x^3}{2.3}+\text{etc.,}\\ +\frac{dz_0}{dy}y+\frac{d^2z_0}{dxdy}xy+\frac{d^2z}{dx^2dy}\frac{x^2y}{2}\\ +\frac{d^2z_0}{dy^2}\frac{y^2}{2}+\frac{d^3z_0}{dxdy^2}\frac{xy^2}{2}\\ +\frac{d^3z_0}{dy^3}\frac{y^3}{2.3} \end{aligned}$$

où nous représentons par z_0, $\frac{dz_0}{dx}$, $\frac{dz_0}{dy}$, $\frac{d^2z_0}{dx^2}$, etc., les valeurs que prennent respectivement les fonctions z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{d^2x}$, etc., lorsqu'on y fait en même temps $x=0$ et $y=0$.

si le nombre des variables indépen-
:rable.

ter la série à un terme déterminé, et
la valeur du reste que l'on néglige,
les numéros 84 et suivants à l'égard
ıe variable, il est visible, par les prin-
ıuméros, que dans le développement
ıs le terme auquel on veut s'arrêter,
lieu de faire $\alpha = 0$; et par conséquent
t de $f(x+h, y+i)$ remplacer x par
:n désignant toujours par θ un nombre
:ntre zéro et l'unité. On connaîtra en-
ées en attribuant, dans le terme dont il
qui le rendent le plus grand ou le

; le cas de la fonction de deux variables
: aux termes du 3e ordre, on aura

$$\frac{z}{x} h + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3.f(x+\theta h, y+\theta i)}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}$$

$$\frac{z}{y} i + \frac{d^2z}{dxdy} hi + \frac{d^3.f(x+\theta h, y+\theta i)}{dx^2dy}\frac{h^2i}{2}$$

$$+ \frac{d^2z}{dy^2}\frac{i^2}{2} + \frac{d^3.f(x+\theta h, y+\theta i)}{dxdy^2}\frac{hi^2}{2}$$

$$+ \frac{d^3.f(x+\theta h, y+\theta i)}{dy^3}\frac{i^3}{2.3}$$

: même à l'égard du cas où la fonction
t les puissances ascendantes des deux
ı s'arrête aux termes du 3e ordre, et si
$= y'$, on aura évidemment

$$f(x,y)=z_0\frac{d^2z_0}{dx}x+\frac{d^2z_0}{dx^2}\frac{x^2}{2}+\frac{d^3.f(x',y')}{dy'^3}\frac{x^3}{2.3}$$
$$+\frac{d^2z_0}{dy}y+\frac{d^2z_0}{dydx}xy+\frac{d^3.f(x',y')}{dx^2dy'}\frac{x^2y}{2}$$
$$+\frac{d^2z_0}{dy^2}\frac{y^2}{2}+\frac{d^3.f(x',y')}{dx'dy'^2}\frac{xy^2}{2}$$
$$+\frac{d^3.f(x',y')}{dy'^3}\frac{y^3}{2.3}$$

En attribuant à θ les valeurs qui rendent l'expression du reste le plus grand et le moindre possible, on aura deux limites entre lesquelles la valeur véritable du développement se trouve nécessairement comprise.

XIV. MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS D'UNE OU DE PLUSIEURS VARIABLES.

142. Considérons en premier lieu une fonction réelle d'une seule variable

$$y=f(x),$$

et représentons-nous l'ensemble des valeurs que prend cette fonction lorsqu'on donne à x toutes les valeurs possibles depuis $-\frac{1}{0}$ jusqu'à $+\frac{1}{0}$. Si les valeurs de la fonction y après avoir été croissantes deviennent décroissantes, la plus grande de ces valeurs est dite un *maximum*; et réciproquement si ces mêmes valeurs, qui diminuaient progressivement, viennent ensuite à augmenter progressivement, la plus petite est dite un *minimum*. On voit qu'il est possible qu'une fonction n'ait point de maximum ni de minimum, ou qu'elle en ait plusieurs. La question consiste à déterminer les valeurs de la variable

s'il en existe, qui répondent aux maxima ou
fonction.

: x répondait à un maximum de la fonction
sible que $f(a)$ serait plus grande que $f(a+h)$
t une quantité moindre que toute grandeur
si la valeur a répondait à un minimum,
tite que $f(a+h)$ et $f(a-h)$. D'après cette
tion dont il s'agit peut être facilement ré-

$f(x+h)$ par la formule de Taylor on a

$$+\frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3.f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\frac{d^4.f(x)}{dx^4}\frac{h^4}{2.3.4}+\text{etc.}$$

oes expliqués dans les n°s 83 et suivants,
r cette série à un terme quelconque, en
es omis une expression dont la valeur est
imites qu'il est toujours facile d'assigner.
er lieu que l'on s'arrête aux termes du
vons

$$(x)+\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\frac{h^2}{2},$$

ore compris entre zéro et $+1$. Il s'agit
nditions nécessaires pour que $f(a)$ soit
$\pm h)$, h pouvant être supposée aussi
Or il est visible qu'en prenant h aussi
a, on pourra toujours faire dépendre
s deux termes $\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\frac{h^2}{2}$
me seul $\frac{d.f(x)}{dx}h$, puisque $\frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\frac{h}{2}$

pourra toujours être rendue plus petite que $\frac{d.f(x)}{dx}$. D'où l'on conclut, 1° que $f(a)$ ne peut être plus grande que $f(a+h)$, quel que soit le signe de h, à moins que $\frac{d.f(a)}{dx}$ ne soit nul et que $\frac{d^2.f(a)}{dx^2}$ ne soit affecté du signe —; 2° que $f(a)$ ne peut être plus petite que $f(a+h)$, quel que soit le signe de h, à moins que $\frac{d.f(a)}{dx}$ ne soit nul, et que $\frac{d^2.f(a)}{dx^2}$ ne soit affecté du signe +.

Ainsi, pour qu'il y ait maximum ou minimum lorsqu'on fait $x=a$, il est nécessaire que cette valeur a rende nul le coefficient différentiel du premier ordre; et il y aura maximum ou minimum suivant que cette même valeur donnera le signe — ou le signe + au coefficient différentiel du second ordre.

143. Il pourrait arriver d'ailleurs que la valeur dont il s'agit rendit nuls les coefficients différentiels des deux premiers ordres. Dans ce cas il est nécessaire de considérer les termes suivants du développement et d'écrire

$$f(x+h)=f(x)+\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3.f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\frac{d^4.f(x+\theta h)}{dx^4}\frac{h^4}{2.3.4}.$$

Le même raisonnement qui a été fait ci-dessus montrera que si les termes $\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}$ disparaissent lorsqu'on fait $x=a$, la valeur a ne peut répondre à un maximum ou à un minimum qu'autant qu'elle fera disparaître également le terme $\frac{d^3.f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}$; et qu'il y aura maximum ou

nt que pour cette même valeur le coefficient
ordre $\frac{d^k.f(x)}{dx^k}$ sera négatif ou positif.

ne peut y avoir maximum ou minimum
donnée de x qu'autant que le premier
ıtiel que cette valeur ne rend pas nul est
et il y a maximum ou minimum suivant
différentiel prendra le signe — ou le

arriver encore que la valeur a de x,
uation $\frac{d.f(x)}{dx}$ ou $\frac{dy}{dx} = 0$, rendît infinis
ntiel du second ordre et les suivants. On
conformément à ce qui a été dit dans le
que la formule de Taylor ne peut exprimer
tion en série ordonnée suivant les puis-
. Les règles précédentes ne peuvent donc
doit examiner d'une manière spéciale la
e la fonction, ce que l'on fera facilement
uivant les puissances fractionnaires ou
avoir fait $x = a$. Il faut observer aussi
nte exclut implicitement les *maxima* et
ıt à une valeur de x, pour laquelle la

ie ou discontinue.

écédentes deviennent bien sensibles en
s dont l'ordonnée y représente les va-
nettant, pour fixer les idées, que $f(x)$
fonctions continues. Il est évident, en
s y avoir maximum ou minimum que
q, r, s (fig. 29), où la tangente est paral-

lèle à l'axe des abscisses, et où l'on a $\frac{dy}{dx}=0$. De plus il y a maximum en m et en p lorsque, la courbe présentant sa concavité au bas de la page, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif; et il y a minimum en n et en q lorsque, la courbe présentant sa convexité au bas de la page, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif. Les quantités négatives sont ici regardées comme étant d'autant plus petites que leur valeur absolue est plus grande.

On reconnaît également que la condition $\frac{dy}{dx}=0$ n'entraîne pas nécessairement l'existence du maximum ou minimum, parce qu'il y a des points pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des x, sans que la fonction ait cessé de croître ou de décroître. Mais ces points sont généralement des points d'inflexion, dans lesquels change le sens de la concavité de la courbe, et où le coefficient différentiel du second ordre devant changer de signe prend la valeur zéro. Nous reviendrons dans la suite sur les caractères analytiques qui appartiennent aux divers *points singuliers* que les courbes peuvent présenter.

146. On voit donc, d'après ce qui précède, que pour trouver les maxima et minima de la fonction proposée $y=f(x)$, en excluant ceux qui rendent infinie ou discontinue la dérivée $f'(x)$, il faut poser l'équation

$$\frac{dy}{dx}=0,$$

qui, étant résolue par rapport à x, donnera les valeurs demandées. On jugera si ces valeurs répondent à un maxi-

ninimum en les substituant dans le coefficient
econd ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$, et voyant le signe qu'elles
:. Si ce coefficient différentiel devenait nul,
x suivants conformément à ce qui a été dit

y n'était donnée que d'une manière impli-
d'une équation $F(x, y) = 0$, on égalerait
son coefficient différentiel, déterminé con-
qui a été dit dans le numéro 44. L'équa-

liendrait alors x et y : mais en éliminant y

ion et $F(x, y) = 0$, il resterait une seule
ii donnerait les valeurs cherchées.

es principes s'appliqueront aux fonctions
. Mais, pour plus de simplicité, nous sup-
: que le théorème de Taylor convient au
ces fonctions, ce qui arrive dans la plupart
u calcul différentiel. Soit

$$z = f(x, y).$$

$x + h$, $y + i$) d'après ce qu'on a vu dans
on aura

$$i) = z + \frac{dz}{dx} h + \frac{d^2.f(x+\theta h, y+\theta i)}{dx^2} \frac{h^2}{2}$$
$$+ \frac{dz}{dy} i + \frac{d^2.f(x+\theta h, y+\theta i)}{dxdy} hi$$
$$+ \frac{d^2.f(x+\theta h, y+\theta i)}{dy^2} \frac{i^2}{2}$$

tion. Or en prenant h et i suffisamment

petits, on rendra toujours le deuxième terme $\frac{dz}{dx}h+\frac{dz}{dy}i$ plus grand que le troisième terme, et par conséquent le signe de leur somme dépendra du signe du deuxième terme seul. Donc pour que les valeurs $x=a$, $y=b$ répondent à un maximum ou à un minimum de la fonction z, ce qui exige que $f(a, b)$ soit plus grande ou plus petite que $f(a\pm h, b\pm i)$, il est nécessaire que le terme $\frac{dz}{dx}h+\frac{dz}{dy}i$ soit nul; et par conséquent puisque les quantités h et i sont absolument indépendantes l'une de l'autre, que l'on ait séparément $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{dz}{dy}=0$. De plus, il faut qu'en donnant une valeur quelconque aussi petite que l'on voudra aux accroissements h et i la quantité $\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^2z}{dxdy}hi+\frac{d^2z}{dy^2}\frac{i^2}{2}$ soit toujours négative pour le maximum et toujours positive pour le minimum. Supposons d'abord que l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{i^2}+2\frac{d^2z}{dxdy}\frac{h}{i}+\frac{d^2z}{dy^2}=0$$

résolue par rapport à l'indéterminée $\frac{h}{i}$ n'ait que des racines imaginaires, c'est-à-dire que l'on ait $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2<\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2}$, condition qui ne peut être satisfaite que si $\frac{d^2z}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$ sont de même signe. Alors la quantité $\frac{d^2z}{dx^2}.\frac{h^2}{2}+\frac{d^2z}{dxdy}.hi+\frac{d^2z}{dy^2}\frac{i^2}{2}$ ne pourra jamais ni devenir nulle, ni changer de signe: elle conservera constamment le signe de son premier terme ou

. maximum si le coefficient $\frac{d^2z}{dx^2}$ est né-

st positif.

raire

$$\frac{d^2z}{xdy}\Big)^2 > \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2},$$

on

$$+2\frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{h}{i}+\frac{d^2z}{dy^2}=0$$

: inégales : par suite la quantité

$$+\frac{d^2z}{dxdy}\cdot hi+\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{i^2}{2}$$

tantôt négative. Il n'y aurait donc ni

1.

r où

$$\frac{d^2z}{dxdy}\Big)^2=\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}$$

à part. Alors l'équation

$$+2\frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{h}{i}+\frac{d^2z}{dy^2}=0$$

gales, et en représentant par m le

$\frac{}{2}$, il vient

$$\frac{}{i}\cdot h+\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{i^2}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}(h+mi)^2$$

$$\frac{}{2}+\frac{d^2z}{dxdy}\cdot hi+\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{i^2}{2}$$

est généralement de même signe que $\frac{d^2z}{dx^2}$, et elle ne devient nulle que quand $h = -mi$. Il y aura alors maximum ou minimum, si l'hypothèse $h = -mi$ réduit à zéro l'ensemble des termes du troisième ordre et rend de même signe que $\frac{d^2z}{dx^2}$ l'ensemble des termes du quatrième ordre. Le maximum répondra d'ailleurs aux valeurs négatives et le minimum aux valeurs positives $\frac{d^2z}{dx^2}$.

148. Si les valeurs a et b qui rendent nuls les termes du premier ordre faisaient également disparaître les termes du second ordre, il est visible qu'elles ne répondraient à un maximum ou à un minimum qu'autant qu'elles feraient également disparaître les termes du troisième ordre en laissant subsister ceux du quatrième. De plus il faudrait que la somme de ces termes du quatrième ordre conservât constamment le signe — pour qu'il y eût maximum, et qu'elle conservât constamment le signe + pour qu'il y eût minimum. Et ainsi de suite.

149. Les résultats précédents deviennent sensibles lorsqu'on regarde la fonction z comme l'ordonnée d'une surface, dont x et y sont les abscisses. Quand la fonction z et ses dérivées sont continues, on reconnaît en effet sur-le-champ qu'il ne peut y avoir maximum ou minimum en un point donné d'une surface qu'autant que les tangentes aux deux intersections de la surface faites en ce point par des parallèles aux plans des xz et des yz, sont parallèles au plan des xy, en sorte que le plan qui touche la surface au point dont il s'agit est lui-même parallèle au plan des xy. Cette première condition donne les équations $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dy} = 0$. De

deux courbes d'intersection dont on vient
nt leur concavité du même côté, ce qui
efficients différentiels $\frac{d^2z}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$ soient de
s cette dernière condition ne suffirait pas
pour assurer l'existence du maximum ou
aut y joindre celles que nous avons données

erait d'une manière semblable les conditions
u du minimum, si le nombre des variables
érable. Soit par exemple la fonction

$$z = f(v, x, y).$$

$$+i) = z + \frac{dz}{dv}g + \frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}i$$

$$\frac{g^2}{2} + \frac{d^2z}{dvdx}gh + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^2z}{dvdy}gi + \frac{d^2z}{dxdy}hi + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{i^2}{2}$$

toujours, en rendant g, h, i suffisamment petits,
e le signe de tous les termes qui suivent le se-
isième du signe seul de ceux-ci. Ainsi les va-
ables v, x, y qui répondront à un maximum ou
um de la fonction z doivent d'abord satisfaire
ations

$$\frac{dz}{dv} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0.$$

st nécessaire qu'en donnant à v, x, y ces mêmes
omme des termes du second ordre, que nous re-
s pour abréger par

$$Ag^2+2Bgh+Ch^2+2Dgi+2Ehi+Fi^2,$$

ne change pas de signe, quelles que soient les valeurs supposées aussi petites que l'on voudra, que l'on attribue à g, h, i. Cela exige en premier lieu que A, C et F soient de même signe. Mais à cette première condition viennent s'en joindre d'autres que l'on découvrira aisément par la méthode du n° 147, c'est-à-dire en étudiant la nature des racines de l'équation

$$Ag^2+2Bgh+Ch^2+2Dgi+2Ehi+Fi^2=0.$$

Il est évident par exemple qu'il y aura maximum ou minimum si en résolvant cette équation par rapport à g, h ou i on ne trouve que des valeurs imaginaires. Bornons-nous à développer ce cas particulier. Résolvons l'équation proposée par rapport à g : les valeurs seront imaginaires si l'on a

$$(Bh+Di)^2<A(Ch^2+2Ehi+Fi^2),$$

ou bien

$$(B^2-AC)h^2+2(BD-AE)hi+(D^2-AF)i^2<0,$$

quels que soient h et i. Ainsi il faut d'abord que l'on ait

$$B^2-AC<0 \qquad \text{et} \qquad D^2-AF<0,$$

puis, qu'en égalant la quantité précédente à zéro, et résolvant par rapport à h ou à i, on ne trouve que des valeurs imaginaires. En résolvant par rapport à h, on reconnaît que les valeurs seront imaginaires si l'on a

$$(BD-AE)^2<(B^2-AC)(D^2-AF).$$

Il résulte donc de ce qui précède que les valeurs de v, x, y

uations

$$\frac{dz}{dx}=0, \quad \frac{dz}{dy}=0$$

maximum ou à un minimum si elles
ommun aux trois coefficients différentiels
$\frac{z}{}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, et de plus satisfont aux

$$\frac{d^2z}{dv^2}\,\frac{d^2z}{dx^2},\ \left(\frac{d^2z}{dvdy}\right)^2<\frac{d^2z}{dv^2}\,\frac{d^2z}{dy^2},$$

$$^2<\left[\left(\frac{d^2z}{dvdx}\right)^2+\frac{d^2z}{dv^2}\,\frac{d^2z}{dx^2}\right]\left[\left(\frac{d^2z}{dvdy}\right)^2-\frac{d^2z}{dv^2}\,\frac{d^2z}{dy^2}\right];$$

num ou minimum suivant que les trois
tiels $\frac{d^2z}{dv^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ seront négatifs ou po-

$$Ag^2+2Bgh+\text{etc.}=0$$

des racines réelles inégales, le maximum
ient impossibles. Mais si les racines réelles
ont égales, la question exigera une discus-
elle qui termine le n° 147.

er une application des règles précédentes,
l'on demande la plus courte ou la plus
s les lignes droites qui peuvent être tracées
une courbe également donnée. Désignant
onnées de ce point, et par x, y celles d'un
de la courbe, l'expression de la longueur

des lignes dont il s'agit sera donc

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

et il faut déterminer la valeur de x par la condition de rendre cette expression la plus grande ou la moindre possible. En différentiant par rapport à x, on trouve

$$\frac{x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}};$$

et, en égalant le coefficient différentiel à zéro,

$$x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}=0, \quad \text{d'où} \quad \frac{y-b}{x-a}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Comme $\frac{dy}{dx}$ représente la tangente trigonométrique de l'angle compris entre la tangente menée à la courbe et l'axe des x, on voit que ce résultat exprime en premier lieu que les lignes les plus courtes ou les plus longues, menées du point donné à la courbe, doivent couper cette courbe à angles droits. Si l'on prend ensuite le coefficient différentiel du second ordre, il vient

$$\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}-\frac{\left[(x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}\right]^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

et en supprimant le second terme, qui est nul en vertu de l'équation posée ci-dessus, on voit que le signe de ce coefficient différentiel dépend de celui de la quantité

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

d que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit positif, c'est-à-dire que la
convexité vers le bas de la page. La quan-
ra toujours positive si $y - b$ est positive,
point donné A (*fig.* 30) est placé plus près
e le point M de la courbe sur lequel est di-
AM; d'où il suit que la distance AM sera
cas un minimum, ce qui est évident. Mais
urs supposé positif, la quantité $y - b$ est
e que le point donné soit plus éloigné de
le point M, la quantité dont il s'agit sera
aura minimum, si la distance $b - y$ est
andis que cette même quantité sera néga-
a un maximum, si la distance $b - y$ est
r, on verra dans la suite, n° 180, que la va-
$\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ appartient à un certain point C tel-
la normale, que le cercle décrit de ce point
coïncide avec la courbe proposée, plus que
tout autre cercle, dans une étendue infini-
part et d'autre du point M. Il est donc évi-
t C doit séparer sur la normale les points A_1
distance A_1M est un minimum, et les points

A_2 pour lesquels la distance A_2M est un maximum. Le cas où le coefficient différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$ serait négatif donnerait lieu à des remarques semblables.

152. Nous considérerons encore la question qui consisterait à déterminer les lignes droites les plus courtes ou les plus longues qui puissent être tracées d'un point d'une courbe donnée à un point d'une autre courbe également donnée. x, y étant les coordonnées d'un point quelconque de la première courbe, et x', y' celles d'un point quelconque de la seconde courbe, la longueur des lignes dont il s'agit sera exprimée généralement par

$$Z = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

expression qu'il faut considérer comme une fonction des deux variables indépendantes x, x', en regardant y comme une fonction de x seule, et y' comme une fonction de x' seule. Appliquant donc les règles exposées n° 147, on aura d'abord

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{x-x'+(y-y')\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}, \quad \frac{dZ}{dx'} = -\frac{x-x'+(y-y')\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}};$$

et en égalant à zéro ces deux coefficients différentiels,

$$x-x'+(y-y')\frac{dy}{dx} = 0, \quad x-x'+(y-y')\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

d'où

$$\frac{y-y'}{x-x'} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}.$$

Ainsi l'on voit en premier lieu que la ligne, dont la longueur

ı ou un minimum, doit couper les deux
roits. Prenant ensuite les coefficients diffé-
ordre, il vient, en supprimant les termes
équations précédentes,

$$\frac{-(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}}{+(y-y')^2}, \quad \frac{d^2Z}{dxdx'}=-\frac{1+\frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}},$$

$$=\frac{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2-(y-y')\frac{d^2y'}{dx'^2}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}.$$

que, pour qu'il y ait maximum ou mini-
ɔrd que les quantités

$$-y')\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{et} \quad 1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2-(y-y')\frac{d^2y'}{dx'^2}$$

ɡne, et de plus que la condition

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}\Big]\left[1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2-(y-y')\frac{d^2y'}{dx'^2}\right]$$

e dernière condition suffirait seule : elle
ement la précédente.

iste des relations entre les variables.

ieurs questions importantes, les valeurs
iables, outre la condition de rendre un
minimum une certaine fonction V, doivent
d'autres conditions qui sont exprimées par
ıées entre ces variables. Il est visible d'ail-
bre de ces équations doit nécessairement

être plus petit que celui des variables, dont dépend la fonction proposée V.

Soit par exemple

$$V = f(x, y, z)$$

et admettons que les variables x, y, z doivent satisfaire à l'équation de condition

$$L = 0,$$

L désignant une fonction donnée de x, y, z. Ce qui se présente de plus naturel est de résoudre l'équation $L = 0$ par rapport à l'une des variables, à z par exemple, et de substituer la valeur obtenue dans $f(x, y, z)$. La fonction V ne contenant plus alors que les deux variables x, y, qui seront entièrement indépendantes, on se trouvera ramené au cas précédent.

De même s'il existait entre les trois variables x, y, z, les deux équations de condition

$$L = 0, \qquad M = 0,$$

on tirerait de ces équations les valeurs de y et z en x, et en les substituant dans $f(x, y, z)$, la fonction V ne contiendrait plus que la seule variable indépendante x.

Comme il sera généralement très-difficile, ou même impossible, d'éliminer ainsi les variables au moyen des équations données, on peut remarquer que la condition du maximum ou du minimum de la fonction V exige que l'on ait

$$\frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz = 0;$$

et de plus que l'équation de condition $L = 0$ étant différen-

ɔnne

$$\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz = 0.$$

'ariables x, y, z étaient entièrement indépendantes, érentielles dx, dy, dz étant arbitraires, la pre- quation entraînerait les équations séparées $\frac{dV}{dx} = 0$, , $\frac{dV}{dz} = 0$. Mais les valeurs que l'on attribue à ces tielles doivent satisfaire à la seconde équation. On onc prendre dans cette seconde équation la valeur de ces différentielles, de dz par exemple, et la substi- ıs la première, qui ne contiendra plus que dx et dy. era ensuite séparément à zéro les termes affectés de ɪ différentielles. On obtiendra de cette manière deux ıs en x, y, z, qui, réunies à l'équation $L = 0$, don- es valeurs cherchées des trois variables.

avait deux équations de condition $L = 0$, $M = 0$, on it les deux équations différentielles

$$\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz = 0,$$
$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz = 0,$$

en desquelles on éliminerait de l'équation $\frac{dV}{dx}dx +$ $+ \frac{dV}{dz}dz = 0$ deux des différentielles dx, dy, dz. L'é- restante, réunie aux deux équations $L = 0$, $M = 0$, it les valeurs cherchées des trois variables x, y, z. méthode peut s'appliquer quel que soit le nombre ables dont dépend la fonction V, et le nombre des

équations de condition ; et elle n'exige que des éliminations entre des équations du premier degré ou linéaires.

154. Mais on parviendra au même résultat d'une manière beaucoup plus simple si, ayant une fonction quelconque V des variables v, x, y, z, etc., qu'il s'agit de rendre un maximum ou un minimum, et plusieurs équations de condition $L=0$, $M=0$, $N=0$, etc., auxquelles ces variables doivent satisfaire, on forme les équations différentielles $dL=0$, $dM=0$, $dN=0$, etc., puis, multipliant respectivement ces équations, par des facteurs indéterminés λ, μ, ν, etc., on les ajoute à l'équation $dV=0$, ce qui donnera l'équation unique

$$dV+\lambda dL+\mu.dM+\nu.dN+\text{etc.}=0,$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dv}dv+\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dz}dz+\text{etc.}\Big)\\
+\lambda&\left(\frac{dL}{dv}dv+\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz+\text{etc.}\right)\\
+\mu&\left(\frac{dM}{dv}dv+\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz+\text{etc.}\right)\\
+\nu&\left(\frac{dN}{dv}dv+\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz+\text{etc.}\right)\\
+&\quad\text{etc.}
\end{aligned}\right\}=0,$$

En disposant convenablement de λ, μ, ν, etc., on rendra nuls les coefficients des différentielles qu'on veut éliminer ; après quoi il faudra égaler à zéro les coefficients des autres différentielles qui sont arbitraires. Les résultats obtenus ainsi seront les mêmes que si l'on avait regardé toutes les variables comme indépendantes, et par suite égalé à zéro le coefficient de chaque différentielle, dans l'équation $dV+\lambda.\,dL+\text{etc.}=0$: on aura autant d'équations distinctes, qui, réunies aux

s $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, etc., seront en nombre pour éliminer les nombres arbitraires λ, μ, ν, etc., iner les valeurs cherchées des variables v, x, y, z, etc. oit proposé, par exemple, de déterminer parmi tous lélipipèdes rectangles dont la surface est égale au a^2, celui dont le volume est le plus grand possible. itant par x, y, z les trois côtés du parallélipipède, la qu'il s'agit de rendre un maximum est donc

$$V = xyz,$$

entre les trois variables l'équation de condition

$$2(xy + xz + yz) = a^2.$$

e qui a été dit ci-dessus, on formera l'équation

$$\left.\begin{array}{c} yz \,.\, dx + xz \,.\, dy + xy \,.\, dz \\ +\lambda[(y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz] \end{array}\right\} = 0,$$

é, en égalant séparément à zéro les termes affectés entielles dx, dy, dz,

$$y + z) = 0; \quad xz + \lambda(x + z) = 0; \quad xy + \lambda(x + y) = 0.$$

t λ entre ces équations, il vient

$$x = y = z,$$

nt égard à l'équation de condition,

$$x = y = z = \sqrt{\frac{a^2}{6}}.$$

ondition du maximum exige que les trois côtés du ipède soient égaux entre eux.

XV. DIFFÉRENTIELLES DE L'AIRE ET DE L'ARC D'UNE COURBE PLANE.

156. Soit la courbe quelconque M*m* (*fig.* 31) rapportée aux coordonnées rectangulaires x, y, et dont l'équation

$$y = f(x)$$

est donnée. L'aire de la courbe est l'espace compris entre l'axe des abscisses, la courbe M*m*, et deux ordonnées quelconques PM, *pm* dont la position est fixée. La première ordonnée PM étant supposée conserver une position fixe, et x désignant la distance variable *op*, il est visible que la grandeur de l'aire PM*mp* est une fonction de l'abscisse x, qui dépend de la nature de la courbe ou de la fonction $f(x)$.

Nous désignerons cette fonction par u. Il s'agit de trouver l'expression de sa différentielle, c'est-à-dire de la variation que subit la fonction u lorsque l'abscisse x augmente de la quantité infiniment petite dx.

Admettons que *op* ou x augmente de la quantité finie Δx représentée par *pq*. L'aire u croîtra de Δu représentée par le trapèze *pmnq*, et l'on peut toujours supposer Δx assez petite pour que la fonction $f(x)$ étant constamment croissante ou décroissante dans l'intervalle *pq*, ce trapèze se trouve compris entre les deux rectangles *mp* et *nq*. Nous pouvons donc écrire

$$\Delta u = y.\Delta x \pm \omega.\Delta x, \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = y \pm \omega,$$

ω étant une quantité plus petite que Δy; nous aurons donc, en prenant la limite des deux membres,

$$\frac{du}{dx} = y \quad \text{et} \quad du = y.dx.$$

Ainsi la différentielle de l'aire d'une courbe est égale au pro-

dx par la fonction de x qui exprime la valeur de
ée y, ou si l'on veut l'aire de la courbe est la fonc-
nitive dont l'ordonnée est le coefficient différentiel
ıction dérivée du premier ordre.

:onsidérons maintenant (*fig.* 31) la longueur de l'arc
ɔurbe comptée à partir du point fixe quelconque M
. point m dont l'abscisse op est représentée par x.
ıgueur étant désignée par s et regardée comme une
de l'abscisse x, proposons-nous de connaître l'ex-
de sa différentielle.

ìsentons par pq la différence Δx, qui peut toujours
se assez petite pour que l'arc correspondant mn tourne
ıvité du même côté. On pourra donc toujours, con-
ent aux théorèmes d'Archimède, considérer la lon-
le cet arc comme étant comprise entre celle de sa
ın et celle des parties $mt + nt$ des tangentes menées
ıx extrémités de l'arc. Donc, à plus forte raison, l'arc
pris entre mr et ns, car mr est plus petite que la corde,
t plus grande que mt. Or $mr = x\sqrt{1 + \left(\frac{d.f(x)}{dx}\right)^2}$
$\frac{d.f(x)}{dx}$ représente la tangente trigonométrique de
que forme la tangente au point m avec l'axe des x. Soit
bréger $\varphi(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{d.f(x)}{dx}\right)^2}$. On aura $\varphi(x + \Delta x)$
a valeur de $\varphi(x)$ qui convient au point n de la courbe.
ıs $= \Delta x\varphi(x + \Delta x)$. Ainsi l'on doit poser

$$> \Delta x.\varphi(x) \quad \text{et} \quad \Delta s < \Delta x\left[\varphi(x) + \frac{d.\varphi(x+\theta.\Delta x)}{dx}\Delta x\right];$$

'on veut

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \varphi(x) + \omega,$$

ω étant une quantité plus petite que $\frac{d.\varphi(x+\theta.\Delta x)}{dx}\Delta x$. D'où l'on déduit, en prenant la limite dont s'approchent indéfiniment les deux membres lorsque Δx tend à devenir nulle,

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{d.f(x)}{dx}\right)^2},\quad \text{et}\quad ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{d.f(x)}{dx}\right)^2};$$

ou bien

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},\quad \text{et}\quad ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

158. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que l'ordonnée à partir de laquelle l'aire u étant comptée, ou le point fixe de la courbe à partir duquel l'arc s était compté, étaient placés de manière que u et s croissaient en même temps que x. S'il en était autrement on devrait donner le signe — à leurs différentielles, et écrire

$$du=-ydx,\ ds=-dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

De plus le signe de la différentielle du change avec le signe de l'ordonnée y; et, en général, lorsque l'on compte les y positives de bas en haut, les parties de l'aire d'une courbe qui sont situées au-dessus de l'axe des x sont positives et celles qui sont situées au-dessous de cet axe sont négatives.

XVI. DU CONTACT DES COURBES PLANES.

159. On dit que deux courbes se *touchent* lorsqu'elles ont un point commun et une tangente commune. De plus lorsque deux courbes pq, rs touchent la courbe mn au même point M, la courbe pq, qui passe entre les deux autres, est regardée comme ayant avec la courbe mn un contact plus intime que

: la courbe *rs*. Les géomètres distinguent ainsi des con-
divers ordres dont les caractères se distinguent facile-
u moyen de la considération des coefficients différen-
fonctions dérivées.

it

$$y = f(x) \qquad \text{et} \qquad y = \varphi(x)$$

ations des deux courbes rapportées à des coordonnées
ulaires ; x désignant l'abscisse du point commun aux
ourbes, et $x + h$ l'abscisse d'un point voisin de celui-
's ordonnées correspondantes seront respectivement

$$x)\,h + \frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.}, \text{ et } \varphi(x) + \frac{d.\varphi(x)}{dx}h + \frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.}$$

ont une tangente commune au point dont l'abscisse
on aura en ce point non-seulement $\varphi(x) = f(x)$, mais
$= \frac{d.f(x)}{dx}$. Cette condition étant satisfaite, on est assuré
une autre ligne ayant pour équation $y = \psi(x)$ ne peut
entre les deux courbes proposées, à moins que l'on
galement $\frac{d.\psi(x)}{dx} = \frac{d.f(x)}{dx}$. En effet la différence des
ées des deux courbes proposées correspondantes à
peut être exprimée par

$$\left(\frac{d^2.\varphi(x+\theta h)}{dx^2} - \frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2};$$

que si la condition dont il s'agit n'avait pas lieu, la
nce entre l'ordonnée de la troisième courbe et celle
première serait exprimée par

$$\frac{.\psi(x)}{dx} - \frac{d.f(x)}{dx}\Big)h + \left(\frac{d^2.\psi(x+\theta h)}{dx^2} - \frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2}.$$

Dans toutes ces expressions, θ désigne un nombre indéterminé compris entre 0 et 1, et qui peut être différent dans les diverses fonctions. Or il est visible qu'en prenant h suffisamment petite on pourra toujours rendre la seconde expression plus grande que la première. Donc aucune courbe $y = \psi(x)$, pour laquelle on n'a point $\frac{d.\psi(x)}{dx} = \frac{d.f(x)}{dx}$, ne peut passer entre les deux courbes $y = f(x)$ et $y = \varphi(x)$, pour lesquelles on a $\frac{d.\varphi(x)}{dx} = \frac{d.f(x)}{dx}$.

Deux lignes qui ont un point commun, et pour lesquelles le coefficient différentiel du premier ordre de l'ordonnée a une valeur commune en ce point, ont entre elles un *contact du premier ordre.*

160. Admettons présentement que pour les deux courbes proposées les coefficients des différentiels deux premiers ordres aient des valeurs communes. La différence des ordonnées de ces courbes qui répondent à l'abscisse $x + h$ sera donc exprimée par

$$\left(\frac{d^3.\varphi(x+\theta h)}{dx^3} - \frac{d^3.f(x+\theta h)}{dx^3}\right)\frac{h^3}{2.3};$$

tandis que pour une troisième courbe qui toucherait la première, mais qui ne satisferait pas à la condition dont il s'agit, la différence des ordonnées serait exprimée par

$$\left(\frac{d^2.\psi(x)}{dx^2} - \frac{d^2.f(x)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2} + \left(\frac{d^3.\psi(x+\theta h)}{dx^3} - \frac{d^3.f(x+\theta h)}{dx^3}\right)\frac{h^3}{2.3}.$$

Et comme la seconde expression, lorsque h tend vers la limite zéro, devient toujours plus grande que la première, il s'ensuit que la troisième courbe ne pourra jamais passer entre les deux autres. Donc aucune courbe, pour laquelle les

différentiels des deux premiers ordres ne seraient
à ceux de la courbe $y = f(x)$, ne pourra passer
courbe et la courbe $y = \varphi(x)$, pour laquelle cette
eu.

es pour lesquelles les coefficients différentiels des
niers ordres ont une valeur commune, sont dites
elles un *contact du second ordre.*

peut continuer de la même manière, et l'on verra
que si les courbes $y = f(x)$ et $y = \varphi(x)$ sont telles,
premiers coefficients différentiels des fonctions
φ) aient pour l'abscisse x une valeur commune, au-
on dit que ces courbes ont un *contact de l'ordre n,*
itre ligne $y = \psi(x)$ ne pourra passer entre elles, à
'elle ne satisfasse également à la condition que les
ers coefficients différentiels de la fonction $\psi(x)$,
aux aux n premiers coefficients différentiels de la
$f(x)$ pour l'abscisse x dont il s'agit. Diverses cour-
se touchent en un même point doivent donc être
s comme ayant un contact d'autant plus intime
ont un plus grand nombre de coefficients différentiels
valeurs coïncident. Le nombre de coefficients diffé-
communs distingue les contacts de divers ordres, ce
ait impossible de faire par la géométrie seule.

Remarquons d'ailleurs que lorsque deux lignes ont
act de premier ordre, elles ne se coupent pas en
, puisque la différence des ordonnées dans les points
ayant pour facteur h^2 ne change pas de signe avec h.
rsqu'elles ont un contact du second ordre, elles se
, parce que la différence des ordonnées dans les points
est affectée de h^3, et change de signe avec h. En gé-
deux lignes se coupent ou non, en même temps

qu'elles se touchent, suivant que leur contact est d'un ordre pair ou d'un ordre impair.

163. Les lignes paraboliques sont les plus simples que l'on puisse mettre en contact avec une courbe donnée. Soit toujours

$$y = f(x)$$

l'équation de cette courbe, et

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots + Hx^n,$$

l'équation d'une courbe parabolique du degré n. A, B, C, D,..... H représentent des coefficients constants qui doivent être déterminés de manière que la courbe parabolique ait un contact de l'ordre n avec la courbe proposée dans le point dont les coordonnées sont x', y'. Ce contact aura lieu d'après ce qui précède si les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,..... $\frac{d^ny}{dx^n}$ déduites de la seconde équation sont égales quand on fait $x = x'$ aux valeurs des mêmes quantités déduites de la première. Or, la détermination des constantes A, B, C....H se trouvera de suite effectuée de manière à satisfaire à cette condition si l'on prend pour l'équation de la courbe parabolique

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}(x-x') + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{(x-x')^2}{2} + \frac{d^3y'}{dx'^3}\frac{(x-x')^3}{2.3} + \ldots + \frac{d^ny'}{dx'^n}\frac{(x-x')^n}{2.3.4\ldots n},$$

ainsi qu'il est facile de le vérifier.

L'équation de la courbe parabolique dont il s'agit contenait $n+1$ constantes arbitraires, et on a pu lui donner un contact de l'ordre n avec une courbe quelconque proposée. En général on peut toujours établir entre une première courbe et une seconde, en un point donné de la première,

t dont l'ordre est marqué par le nombre des con-
oitraires contenues dans l'équation de cette seconde
minuée d'une unité.

l'on se bornait au premier degré on aurait sim-

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x'),$$

d'une ligne droite qui touche la courbe $y = f(x)$
point dont les coordonnées sont x' et y'. Aucune
oite ne peut passer entre la courbe et la tangente
agit.
.'équation du second degré donne

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x') + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{(y - x')^2}{2},$$

. appartenant à une parabole ordinaire, dont l'axe
llèle à l'axe des y, qui touche également la courbe
dans le point dont les coordonnées sont x', y', et qui
a un contact du second ordre avec cette courbe, ou
latrice à cette courbe, suivant une autre expression
ment employée par les géomètres. Aucune autre
e du second degré, dont l'axe serait également pa-
à l'axe des x, ne peut passer entre la courbe pro-
t la parabole représentée par l'équation précédente.
En général, on voit qu'un point quelconque M d'une
e courbe étant fixé, tout se réduit, pour donner en
t à une seconde courbe un contact de l'ordre n avec
nière, à faire en sorte que l'équation de la seconde
et ses équations différentielles jusques et compris
n, soient vérifiées par les valeurs de l'abscisse x' du

point M, de l'ordonnée y' de ce point, et des coefficients différentiels $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, $\frac{d^3y'}{dx'^3}$, ... $\frac{d^ny'}{dx'^n}$ de cette ordonnée.

XVII. TANGENTES ET NORMALES AUX COURBES PLANES. ASYMPTOTES.

167. L'équation de la tangente en un point quelconque d'une courbe donnée est, d'après ce qui précède,

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x').$$

x', y' représentent les coordonnées du point de contact; $\frac{dy'}{dx'}$ est la valeur du coefficient différentiel du premier ordre de la fonction $y = f(x)$, qui a lieu dans ce même point.

L'équation de la normale, qui se déduit immédiatement de celle de la tangente, est

$$y - y' = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}(x - x'), \qquad \text{ou} \quad x - x' + \frac{dy'}{dx'}(y - y') = 0.$$

168. Lorsqu'on veut exprimer la direction d'une ligne droite, on suppose cette ligne transportée parallèlement à elle-même à l'origine des coordonnées, et l'on considère les angles qu'elle forme avec les parties des axes sur lesquels on compte les coordonnées positives. Nommons α, β les angles que la tangente d'une courbe forme avec les parties des axes sur lesquels on compte respectivement les x positives et les y positives. L'angle α aura pour tangente trigonométrique $\frac{dy'}{dx'}$,

ıus de l'angle 6 sera toujours égal au sinus de l'an-
nc

$$\text{.}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}}, \quad \cos.6 = \frac{\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}},$$

ı représente de la même manière par λ, μ les angles
ar la normale à la courbe avec les partie des axes
ıels on compte respectivement les x positives et les y
, l'angle λ aura pour tangente trigonométrique $-\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}$,
sinus de l'angle μ sera toujours égal au cosinus de
λ. Par conséquent

$$.\lambda = = \frac{\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}}, \quad \cos.\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}},$$

peut donner indifféremment le signe + ou le signe —
lical $\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}$, mais on doit lui donner le même
dans les expressions des cosinus des deux angles qui
portent à la même ligne. Suivant le signe que l'on
era à ce radical, les deux angles se rapporteront à la
de la ligne qui est d'un côté ou de l'autre de l'origine
oordonnées. Lorsque ce radical est pris positivement, il
ntendu que l'on considère la partie MS (*fig.* 32) de la
ente qui est située par rapport au même point M du côté
x positives, et la partie MN de la normale qui est située
rapport au même point du côté des y positives.

169. On peut aussi, en désignant, comme dans le n° 157, par ds la différentielle de l'arc de la courbe, exprimer par

$$\cos.\alpha = \frac{dx'}{ds'} \quad \text{et} \quad \cos.\beta = \frac{dy'}{ds'}$$

les cosinus des angles que la tangente au point m forme avec les axes des x et des y; et par

$$\cos.\lambda = \frac{dy'}{ds'} \quad \text{et} \quad \cos.\mu = \frac{dx'}{ds'}$$

les cosinus des angles que la normale au même point forme avec les axes des x et des y. Dans ces formules l'élément différentiel ds' doit être regardé comme pouvant prendre à volonté le signe + ou le signe —, puisque rien ne règle d'avance dans quel sens l'arc s est compté. Mais on doit toujours lui donner le même signe dans les deux formules correspondantes. Suivant que l'un prendra ds' positivement ou négativement, les angles α, β, ou λ, μ se trouveront comptés à partir de l'une ou de l'autre des portions de la tangente ou de la normale qui sont séparées par le point de la courbe.

170. Soit le point M (*fig.* 32) d'une courbe, et supposons la tangente et la normale menées en ce point prolongées jusqu'aux points T et R où elles rencontrent l'axe des x. L'ordonnée y' du point de contact est représentée par MP, et l'on a

$$\text{La } \textit{tangente } \text{MT} = \frac{y'}{\sin.\alpha} = \frac{y'\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx'}\right)^2}}{\frac{dy'}{dx'}}$$

La *sous-tangente* $PT = \frac{y'}{\text{tang.}\alpha} = \frac{y'}{\frac{dy'}{dx'}}$

La *normale* $MR = \frac{y'}{\cos.\alpha} = y'\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}$

La *sous-normale* $PR = y' \text{ tang.}\alpha = y'\frac{dy'}{dx'}$

ée est moyenne proportionnelle entre la sous-tan-
la sous-normale.

Nous remarquerons que l'équation primitive d'une
st souvent donnée sous la forme

$$F(x, y) = 0.$$

on différentielle est alors

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0,$$

a, conformément au n° 44, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$. En mettant

aleur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation de la tangente du n° 167,
vient

$$\frac{dF}{dx'}(x-x') + \frac{dF}{dy'}(y-y') = 0.$$

sse de l'équation différentielle de la courbe à l'équa-
e la tangente en remplaçant le rapport $\frac{dy}{dx}$ par le rap-
$\frac{-y'}{-x'}$.

L'équation de la normale devient de la même manière

$$\frac{dF}{dx'}(x-x')-\frac{dF}{dy'}(y-y')=0.$$

On passe également de l'équation différentielle de la courbe à l'équation de la normale en remplaçant le rapport $\frac{dy}{dx}$ par le rapport $-\frac{x-x'}{y-y'}$.

Les angles formés par la tangente avec les axes des x et des y étant toujours désignés par α et β, on a

$$\cos.\alpha=-\frac{\frac{dF}{dy'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy'}\right)^2}},\quad \cos.\beta=\frac{\frac{dF}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy'}\right)^2}}.$$

Et les angles formés par la normale avec les axes des x et des y étant toujours désignés par λ et μ, on a

$$\cos.\lambda=\frac{\frac{dF}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy'}\right)}},\quad \cos.\mu=\frac{\frac{dF}{dy'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy'}\right)}}.$$

172. Lorsque les courbes ont des branches qui s'étendent à l'infini, il arrive quelquefois qu'elles s'approchent indéfiniment de certaines lignes droites que l'on a nommées *asymptotes*. Les asymptotes sont des tangentes dont le point de contact est placé à une distance infinie de l'origine des coordonnées. L'équation générale

$$\frac{dF}{dx'}(x-x')+\frac{dF}{dy'}(y-y')=0$$

à l'une quelconque des tangentes de la courbe
ée par l'équation $F(x, y) = 0$. Elle appartiendra
symptote si l'on y suppose les coordonnées x'
point de contact infiniment grandes. Par con-
pour obtenir l'équation des asymptotes d'une
onnée, il faut mettre dans l'équation générale des

$$\frac{dF}{dx'}(x-x') + \frac{dF}{dy'}(y-y') = 0$$

de y' en x' tirée de l'équation $F(x', y') = 0$, puis
infinie positive ou négative, ce qui donnera toutes
ptotes qui ne coïncident pas avec l'axe des y,
eraient pas parallèles à cet axe. On trouvera ces
s, s'il en existe, en mettant dans la même équa-
valeur de x' en y' tirée de l'équation $F(x', y') = 0$,
sant y' infinie positive ou négative, et ne con-
que les résultats qui ne correspondent pas à x'

Le même procédé peut s'appliquer au cas où il
non pas d'une ligne droite, mais de toute autre
asymptotique. Après avoir déterminé, conformé-
ce qu'on a vu dans l'article XVI, l'équation de la
$y = \varphi(x)$ de manière qu'elle ait un contact du pre-
dre avec la courbe $y = f(x)$ dans le point dont les
nnées sont x', y', on connaîtra la figure que doit
la courbe $y = \varphi(x)$ pour qu'elle soit asymptote de
en substituant dans son équation les valeurs de
x', ou de x' en y' données par l'équation $y' = f(x')$,
isant x' ou y' infinie.

Nous indiquerons quelques applications de ces for-

mules générales. L'équation de l'*ellipse* ou de l'*hyperbole* rapportée aux diamètres, dont nous désignons respectivement par a et b les demi-longueurs, est

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équation différentielle est

$$\frac{x}{a^2}\,dx \pm \frac{y}{b^2}\,dy = 0,$$

et donne

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Les équations de la tangente et de la normale seront respectivement

$$\frac{x'}{a^2}(x - x') \pm \frac{y'}{b^2}(y - y') = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1,$$

$$\pm \frac{y'}{b^2}(x - x') - \frac{x'}{a^2}(y - y') = 0, \text{ ou } \frac{y'x}{b^2} \pm \frac{x'y}{a^2} = x'y'\left(\frac{1}{b^2} \mp \frac{1}{a^2}\right).$$

On aura pour les expressions de la sous-tangente et de la sous-normale,

$$\text{sous-tangente} = \frac{a^2}{x'} - x', \qquad \text{sous-normale} = x' \pm \frac{b^2 x'}{a^2}.$$

La sous-tangente est indépendante du petit axe $2b$, et par conséquent elle conserve la même valeur pour le cercle et pour toutes les ellipses dont le diamètre pris pour axe des x a la même longueur $2a$. Le rapport de la sous-normale à l'abscisse est constant pour tous les points d'une même ellipse ou d'une même hyperbole.

l'hyperbole équilatère, dont l'équation en termes

$$xy = \frac{a^2}{2},$$

ation différentielle

$$ydx + xdy = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

sous-tangente $= -x'$, sous-normale $= -\frac{y'^2}{x'}$.

ıs-tangente est égale à l'abscisse, mais doit être prise te de l'ordonnée, la tangente formant un angle obtus es x positives.

. Pour trouver les asymptotes de l'hyperbole on mettra 'équation de la tangente

$$\frac{x'x}{a^2} - \frac{y'y}{b^2} = 1$$

aleur de $\frac{y'}{b}$ déduite de l'équation de la courbe $-\frac{y'^2}{b^2} = 1$, qui est $\frac{y'}{b} = \pm\sqrt{\frac{x'^2}{a^2} - 1}$, ce qui donnera

$$\frac{x'x}{a^2} \mp \sqrt{\frac{x'^2}{a^2} - 1}.\frac{y}{b} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a} \mp \sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}}.\frac{y}{b} = \frac{a}{x'};$$

n faisant x' infiniment grande, il viendra

$$\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = 0 \quad \text{ou} \quad y = \pm\frac{b}{a}x$$

ır l'équation de ces asymptotes.

176. Dans la *parabole* représentée par l'équation

$$y^2 = 2px,$$

on a pour l'équation différentielle

$$ydy = pdx, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

L'équation de la tangente est

$$y'(y - y') = p(x - x') \quad \text{ou} \quad y'y = p(x + x').$$

L'équation de la normale est

$$y'(x - x') + p(y - y') = 0.$$

On a pour les expressions de la sous-tangente et de la sous-normale

$$\text{sous-tangente} = 2x', \qquad \text{sous-normale} = p.$$

La sous-tangente est toujours double de l'abscisse, qui est ici comptée du sommet de la courbe. La valeur de la sous-normale est constante dans toute l'étendue de cette courbe.

177. L'équation de la *logarithmique*

$$y = \log. x$$

donne, en changeant l'une pour l'autre les coordonnées, l'équation

$$y = a^x,$$

a désignant la base du système de logarithmes, que nous

toujours plus grande que l'unité. L'équation diffé-
duite de cette dernière est

$$dy = la.a^x dx:$$

aura respectivement pour les équations de la tan-
e la normale

$$y - y' = la.a^{x'}(x - x')$$

$$y - y' + \frac{a^{-x'}}{la}(x - x') = 0.$$

re également

sous-tangente $= \frac{1}{la}$, sous-normale $= la.a^{2x'}$.

a sous-tangente est constante et égale au module du
e de logarithmes. Mais la sous-normale augmente
ment à mesure que le point de contact s'éloigne de
ne des coordonnées.
d'après ce qui a été dit n° 172, on remplace y' par
eur $a^{x'}$ dans l'équation de la tangente, il viendra

$$y - a^{x'} = la.a^{x'}(x - x').$$

ant ensuite $x' = -\frac{1}{0}$ cette équation se réduit à

$$y = 0;$$

ù l'on conclut que l'axe des y est asymptote de la courbe
côté des x négatives. Il faut remarquer ici que l'on
it prendre 0 pour la valeur du terme $-x'a^{x'}$ lorsque

l'on fait $x' = -\frac{1}{0}$. Car ce produit revient à $\frac{x'}{a^{x'}}$, dans lequel on ferait $x' = \frac{1}{0}$. Or a étant > 1, la est positif. L'équation $a^{x'} = 1 + x'la + \frac{x'^2}{2}(la)^2 + \ldots\ldots$ donne par suite $a^{x'} > \frac{x'^2}{2}(la)^2$ et $\frac{x'}{a^{x'}} < \frac{2}{x'(la)^2}$. Donc la valeur du rapport dont il s'agit a zéro pour limite quand x' est supposée croître de plus en plus et devenir plus grande que toute ligne donnée.

178. On a nommé *cycloïde* la courbe décrite par un point d'une circonférence de cercle roulant sur une ligne droite. Les propriétés très-remarquables de cette courbe ont plusieurs applications importantes dans la géométrie et dans la mécanique. Soit c (*fig.* 33) la position actuelle du centre du cercle, et m celle du point de sa circonférence qui décrit la courbe. Nous prendrons pour axe des x la ligne droite sur laquelle roule le cercle, et pour origine des coordonnées le point o où le point m se trouvait sur cette ligne à l'instant où le mouvement a commencé. Les coordonnées x, y étant donc représentées par op et mp, on aura évidemment, en désignant par R le rayon du cercle dont le mouvement décrit la courbe, et par ω l'angle mcr compris entre le rayon vecteur cm et le diamètre de ce cercle qui est perpendiculaire à l'axe des x,

$$x = \mathrm{R}(\omega - \sin.\omega), \qquad y = \mathrm{R}(1 - \cos.\omega);$$

d'où

$$\cos.\omega = \frac{\mathrm{R} - y}{\mathrm{R}}, \qquad \sin.\omega = \frac{\sqrt{2\mathrm{R}y - y^2}}{\mathrm{R}},$$

et par conséquent

$$x = \mathrm{R}.\arccos.\frac{\mathrm{R}-y}{\mathrm{R}} - \sqrt{2\mathrm{R}y - y^2}$$

l'équation en termes finis de la courbe. Elle pré-
une infinité de parties, soit du côté des x positives,
lu côté des x négatives, toutes situées au-dessus de
des x, égales entre elles, et occupant chacune sur
axe un intervalle oa égal à $2\pi\mathrm{R}$. Chaque partie est
eurs formée de deux moitiés dont la figure est symé-
e.

s deux expressions précédentes de x et y étant diffé-
iées donnent

$$dx = \mathrm{R}(1 - \cos.\omega)d\omega, \qquad dy = \mathrm{R}\sin.\omega.d\omega.$$

c

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin.\omega}{1-\cos.\omega} = \frac{\sqrt{2\mathrm{R}y - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2\mathrm{R}}{y} - 1}.$$

équations de la tangente et de la normale sont respec-
ement, d'après les formules générales du n° 167,

$$y - y' = \sqrt{\frac{2\mathrm{R}}{y'} - 1}\,(x - x')$$

$$y - y' = -\frac{1}{\sqrt{\frac{2\mathrm{R}}{y'} - 1}}\,(x - x').$$

i a de plus

$$\textit{tangente} = y'\sqrt{\frac{2\mathrm{R}y'}{2\mathrm{R}y' - y'^2}}$$

$$\textit{sous-tangente} = \frac{y'^2}{\sqrt{2\mathrm{R}y - y'^2}}$$

$$\textit{normale} = \sqrt{2\mathrm{R}y'}$$

$$\textit{sous-normale} = \sqrt{2\mathrm{R}y' - y'^2}.$$

La normale coupe toujours l'axe des x au point où cet axe est touché par le cercle générateur.

XVIII. CERCLE OSCULATEUR. DÉVELOPPÉES DES COURBES PLANES.

179. La ligne la plus simple après la ligne droite est le cercle, et comme son équation contient en général trois constantes dont on est libre de disposer, on peut donner à un cercle un contact du second ordre avec une courbe quelconque. Revenons aux notions présentées dans les numéros 159 et suivants. Soit

$$y = f(x)$$

l'équation d'une courbe quelconque proposée, et

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = \rho^2$$

l'équation d'un cercle quelconque, α et β désignant les coordonnées du centre, et ρ le rayon. 1° D'après ce qui a été dit numéro 164, on donnera à ce cercle un contact du premier ordre avec la courbe proposée au point M dont les coordonnées sont x', y', si l'on détermine les constantes α, β et ρ de manière que l'équation du cercle et son équation différentielle du premier ordre, qui est

$$\alpha - x + (\beta - y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

soient satisfaites par les valeurs de x', y', $\frac{dy'}{dx'}$ qui appartiennent au point M dans cette courbe proposée. Nous avons

leux équations

$$(\alpha - x')^2 + (6 - y')^2 = \rho^2$$
$$\alpha - x' + (6 - y')\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

es les valeurs de α, 6, ρ doivent satisfaire. La seconde, dérant α et 6 comme des coordonnées variables, ap- à la normale menée à la courbe au point M, et l'une coordonnées demeure indéterminée. On en conclut cercle dont le centre sera placé sur la normale tou- courbe, résultat qu'il était facile de prévoir.

2° Pour donner au cercle un contact du second vec la courbe proposée au point M, il faut que l'é- de ce cercle, son équation différentielle du premier et son équation différentielle du second ordre, qui

$$1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 - (6 - y')\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0,$$

satisfaites par des valeurs de x', y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ qui ap- nnent au point M dans cette courbe proposée. Nous donc maintenant les trois équations

$$(\alpha - x')^2 + (6 - y')^2 = \rho^2$$
$$\alpha - x' + (6 - y')\frac{dy'}{dx'} = 0$$
$$1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 - (6 - y')\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0,$$

lesquelles les valeurs des constantes α, 6 et ρ sont entiè- ent déterminées. On en déduit

$$\alpha - x' = -\frac{\frac{dy'}{dx'}\left[1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}, \qquad 6 - y' = \frac{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

expressions qui font connaître la position du centre du cercle osculateur et la grandeur de son rayon. Le signe de la valeur du rayon ρ est indéterminé à raison du radical $\left[1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$, qui peut également être pris positivement ou négativement; mais il n'en est pas de même des valeurs des quantités $\alpha - x'$ et $6 - y'$, qui sont les projections de ce rayon sur les axes des x et des y. Le signe de ces quantités indique de quel côté de la courbe le centre du cercle osculateur doit être placé sur la normale : on reconnaît facilement que ce centre se trouvera toujours placé, comme cela doit être, du côté de la concavité de la courbe.

181. La détermination du cercle osculateur donne la mesure de la *courbure* d'une ligne quelconque en un point donné. Pour se former la notion de la courbure on admet qu'à partir du point de contact M on s'avance sur la courbe jusqu'à un point voisin N, et que l'on compare la distance NT de ce point à la tangente avec l'intervalle MN parcouru sur la courbe, ou plutôt avec son carré auquel la distance NT est sensiblement proportionnelle quand l'intervalle MN est très-petit. La limite vers laquelle tend la valeur du rapport de NT à $\overline{MN}^2$, lorsque MN tend vers zéro, est la mesure de la courbure de la courbe au point M. Dans le cercle la courbure est égale dans tous les points, et de

est pour divers cercles en raison inverse de leurs
ar soit MN $= \sigma$ dans le cercle dont le rayon est R :

$$NT = R\left(1 - \cos.\frac{\sigma}{R}\right); \text{ et } \frac{NT}{\overline{MN}^2} = \frac{\left(1 - \cos.\frac{\sigma}{R}\right)}{\sigma^2},$$

qui, à mesure que σ diminue, tend à se réduire à
ıme le cercle osculateur dans le voisinage du point
ıct s'écarte moins que tout autre cercle de la courbe
e, on regarde la courbure du cercle osculateur
donnant la mesure de la courbure de la courbe, qui
si proportionnelle en chacun de ses points à $\frac{1}{\rho}$, en
ınt comme ci-dessus par ρ le rayon du cercle oscu-
en ce point. Le rayon du cercle osculateur est sou-
ppelé par cette raison *rayon de courbure.*
arder le cercle osculateur comme donnant la mesure
courbure de la courbe, c'est admettre que dans une
ue infiniment petite de part et d'autre du point de con-
le cercle et la courbe peuvent être pris l'un pour l'autre.
seule hypothèse suffit pour établir les résultats précé-
. Soit en effet s l'arc de la courbe compté jusqu'au point
l'abscisse est x, et τ l'angle compris entre l'axe des x et
ngente de la courbe menée au même point, les quantités
τ étant regardées comme des fonctions de x. Lorsque
abscisse x croîtra de dx, s croîtra de ds, et τ croîtra de
La différentielle $d\tau$ représentera l'angle compris entre les
x tangentes de la courbe menées aux points qui répon-
ıt aux abscisses x et $x + dx$, ou si l'on veut l'angle com-
s entre les deux normales menées à la courbe en ces
mes points. Or l'arc ds étant regardé comme appartenant
cercle osculateur dont le rayon est ρ, on a

$$ds = \rho . d\tau,$$

c'est-à-dire

$$dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \rho . d\left(\text{arc tang.} = \frac{dy}{dx}\right) = \rho \frac{\frac{d^2y}{dx^2}dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

d'où l'on tire comme ci-dessus

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

La longueur du rayon de courbure étant déterminée, la position du centre du cercle osculateur est connue, puisque l'on sait que le rayon de courbure est dirigé suivant la normale du côté où la courbe tourne sa concavité.

Nous omettons ici, pour plus de simplicité, les accents dont les lettres x, y sont affectées dans les formules des numéros précédents. On n'oubliera pas qu'elles expriment les coordonnées du point où la courbe proposée est touchée par le cercle osculateur.

182. L'angle $d\tau$, ou l'angle compris entre deux tangentes ou entre deux normales à la courbe, menées aux extrémités de l'arc infiniment petit ds, est appelé *angle de contingence*. Comme on déduit de l'équation précédente

$$\rho = \frac{ds}{d\tau},$$

on voit que le rayon de courbure est égal à l'élément de l'arc divisé par l'angle de contingence.

183. Si nous supposons d'ailleurs, comme on l'a fait dans le n° 171, que l'équation de la courbe proposée soit donnée

forme

$$F(x, y) = 0,$$

ı d'après le n° 72,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 \frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dxdy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \frac{d^2F}{dy^2}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^3},$$

mettant ces valeurs dans les expressions de α, 6 et ρ 180, il viendra

$$\alpha - x = -\frac{\frac{dF}{dx}\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right]}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 \frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dxdy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \frac{d^2F}{dy^2}}$$

$$6 - y = -\frac{\frac{dF}{dy}\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right]}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 \frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dxdy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \frac{d^2F}{dy^2}}$$

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 \frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dxdy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \frac{d^2F}{dy^2}}$$

84. Nous avons supposé dans ce qui précède que l'abse x était prise pour variable indépendante. On peut si faire varier également x et y, en regardant ces deux ordonnées comme des fonctions d'une troisième variable elconque. Dans ce cas l'équation du cercle et ses deux

équations différentielles du premier et du second ordre étant

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = \rho^2$$
$$(\alpha - x)dx + (\beta - y)dy = 0$$
$$dx^2 + dy^2 - (\alpha - x)d^2x - (\beta - y)d^2y = 0,$$

on trouve, en désignant par ds l'élément de la courbe, $\sqrt{dx^2 + dy^2}$,

$$\alpha - x = -\frac{dyds^2}{dxd^2y - dyd^2x}, \quad \beta - y = \frac{dxds^2}{dxd^2y - dyd^2x},$$
$$\rho = \frac{ds^3}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

On parviendrait aux mêmes résultats en substituant dans les expressions du numéro 180 les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ données dans l'article IX pour le changement de la variable indépendante. Les résultats dont il s'agit conviennent sans modification au cas où l'arc s est pris pour la variable indépendante, et où, par conséquent, la différentielle ds est supposée constante.

On peut d'ailleurs les représenter sous une autre forme, en remarquant que

$$(dxd^2y - dyd^2x)^2 = ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2] - (dxd^2x + dyd^2y)^2$$
$$= ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2];$$

et d'autre part que

$$-dy(dxd^2y - dyd^2x) = ds(dsd^2x - dxd^2s) = ds^3.d\left(\frac{dx}{ds}\right)$$
$$dx(dxd^2y - dyd^2x) = ds(dsd^2y - dyd^2s) = ds^3.d\left(\frac{dy}{ds}\right).$$

donc

$$\frac{ds^2 . d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}, \quad 6 - y = \frac{ds^2 . d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}$$

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}}.$$

:onclut de ces expressions qu'en représentant par λ et ngles formés avec les axes des x et des y par la partie ıormale sur laquelle est placé le rayon ρ, on a

$$\cos. \lambda = \frac{\rho}{ds} . d\left(\frac{dx}{ds}\right), \quad \cos. \mu = \frac{\rho}{ds} . d\left(\frac{dy}{ds}\right).$$

l'arc s est pris pour variable indépendante, on fera :0, et l'on remplacera $d\left(\frac{dx}{ds}\right)$ et $d\left(\frac{dy}{ds}\right)$ par $\frac{d^2x}{ds}$ et $\frac{d^2y}{ds}$.

5. Les résultats auxquels on vient de parvenir devien- très-sensibles lorsque la courbe est regardée comme la ɜ d'un polygone dont le nombre des côtés augmente de en plus. Soient l, m, n (*fig.* 34) trois points de la courbe ıosée dont les abscisses op, oq, or sont x, $x + dx$, $dx + d(x + dx)$ ou $x + 2dx + d^2x$. En prolongeant l'arc considéré comme une ligne droite, formant le triangle · égal au triangle lam, traçant cn, et menant cd et ce pendiculaires sur nr et mn (que l'on considère égale- nt comme une ligne droite), on voit que cd repré- te d^2x; nd, d^2y; et ne, d^2s. Mais $nc = \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}$. nc $ce = \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}$. Or $\frac{ce}{cm}$ est l'angle de ntingence, c'est-à-dire $\frac{ds}{\rho}$; donc

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{ds}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}}.$$

De plus $\frac{dx}{ds}$ représente le cosinus de l'angle *alm* formé par la tangente au point *l* avec l'axe des x. Or quand on passe du point *l* au point *m*, ce cosinus varie d'une quantité proportionnelle à la projection de *ce* sur *mb*. Donc $\frac{ce}{cm}.\cos.\lambda = d\left(\frac{dx}{ds}\right)$. On a de même $\frac{ce}{cm}.\cos.\mu = d\left(\frac{dy}{ds}\right)$. D'où l'on conclut

$$\cos.\lambda = \frac{ds.d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}},\ \cos.\mu = \frac{ds.d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}}$$

expressions qui reviennent aux précédentes.

Développées.

186. Soit toujours

$$y = f(x) \qquad \text{(A)}$$

l'équation d'une courbe donnée. Nous aurons d'après le n° 180, pour déterminer le cercle osculateur au point de cette courbe dont les coordonnées sont x, y, les trois équations

$$\begin{aligned} (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 &= \rho^2 \\ (\alpha - x) + (\beta - y)\frac{dy}{dx} &= 0 \qquad \text{(B)} \\ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (\beta - y)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) &= 0, \end{aligned}$$

dans lesquelles α, β représentent les coordonnées du centre de ce cercle, et ρ son rayon. Les valeurs de α et β déduites

équations ont été données n° 180 et sont

$$= x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad 6 = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \quad \text{(C)}$$

ettant pour y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ leurs valeurs en x déduites équation (A) de la courbe proposée, elles se trouveront imées au moyen de l'abscisse x, et donneront la posi- du centre de courbure qui répond à un point quel- que de cette courbe.

uand on fera varier x pour passer d'un point à l'autre la courbe $y=f(x)$, la position du centre de courbure ngera en conséquence. La série de ces positions for- ra une courbe dont α et 6 considérées comme variables résentent les coordonnées, et dont on aura évidemment uation en éliminant x entre les deux équations (C). effet, ces expressions conviennent à l'un quelconque s centres de courbure déterminés par la valeur attri- uée à x : en faisant disparaître cette variable par l'éli- ination, il ne reste plus qu'une relation qui convient tous les centres dont il s'agit, c'est-à-dire à la courbe ui en est le lieu. Cette courbe a été nommée d'après uygens la *développée* de la courbe donnée, dont l'équation st $y=f(x)$.

187. Les équations (B) appartiennent évidemment à la développée en y considérant α, 6 et ρ comme variables et comme des fonctions de x. Les différentielles de ces équa- tions lui appartiennent donc également. Or, en différentiant la première équation (B) et en supprimant les termes nuls en vertu de la seconde, on a

$$(\alpha - x)d\alpha + (\beta - y)d\beta = \rho d\rho. \qquad \text{(D)}$$

En différentiant de même la seconde équation (B) et supprimant les termes nuls en vertu de la troisième, on a de plus

$$dx d\alpha + dy d\beta = 0. \qquad \text{(E)}$$

L'équation (E) exprime que les tangentes menées aux points correspondants d'une courbe et de sa développée sont toujours perpendiculaires l'une sur l'autre. Ainsi le rayon de courbure touche constamment la développée. Remarquons de plus que l'équation (D) peut s'écrire

$$\frac{\alpha - x}{\rho} d\alpha + \frac{\beta - y}{\rho} d\beta = d\rho.$$

Or $\frac{\alpha - x}{\rho}$ et $\frac{\beta - y}{\rho}$ sont respectivement les cosinus des angles formés avec les axes des x et des y par le rayon ρ tangent à la développée. Donc le premier membre de cette dernière équation représente la somme des projections sur la tangente de la développée des éléments $d\alpha$ et $d\beta$, c'est-à-dire la longueur de l'élément de l'arc de la développée dont $d\alpha$ et $d\beta$ sont respectivement les projections sur les axes des x et des y. En le désignant par $d\sigma$, c'est-à-dire en posant $d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$, nous aurons donc

$$d\sigma = d\rho.$$

Ainsi nous voyons que tandis qu'on passe sur la courbe proposée du point m (*fig.* 35) dont l'abscisse op est x, au point n dont l'abscisse oq est $x + dx$, et par conséquent du point μ de la développée au point ν, l'arc $\mu\nu$ compris

ces deux points est égal à la différence des deux rayons
ırbure $m\mu$ et $n\nu$.
conclut des résultats précédents que la courbe mn
décrite d'un mouvement continu par l'extrémité d'un
ıdu qui aurait été enveloppé sur la courbe $\mu\nu$, et
'on développerait progressivement. C'est par cette rai-
que la courbe $\mu\nu$ est nommée la développée de la
e mn. Réciproquement la courbe mn est nommée
veloppante de la courbe $\mu\nu$. La considération des dé-
pées est d'un grand usage dans plusieurs applications
rtantes.

8. Si l'équation de la courbe proposée était donnée
la forme

$$F(x, y) = 0,$$

'emplacerait alors les équations (C), entre lesquelles x
être éliminée pour obtenir l'équation de la dévelop-
, par les expressions de α et β qui ont été données
183. On éliminerait ensuite x et y entre ces dernières
ations et l'équation $F(x, y) = 0$ de la courbe pro-
ée.

Exemples de l'application des résultats précédents.

189. Soit en premier lieu l'équation de l'*ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

ı aura donc ici $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, $\frac{dF}{dx} = \frac{2x}{a^2}$,
$\frac{dF}{dy} = \frac{2y}{b^2}$, $\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{2}{a^2}$, $\frac{d^2F}{dxdy} = 0$, $\frac{d^2F}{dy^2} = \frac{2}{b^2}$, et en substi-

tuant dans l'expression de ρ du n° 183, il viendra

$$\rho = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

par l'expression du rayon de courbure qui convient à cette courbe.

En substituant maintenant les expressions précédentes dans les valeurs de α et de β du même numéro, on trouve

$$\alpha = x^3\frac{a^2-b^2}{a^4}, \qquad \beta = y^3\frac{b^2-a^2}{b^4};$$

puis en tirant les valeurs de x et y et les mettant dans l'équation de la courbe, on a

$$\left(\frac{a\alpha}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

pour l'équation de la développée de l'ellipse. Cette ligne est formée de quatre parties égales disposées symétriquement par rapport aux diamètres rectangulaires de l'ellipse. Les rayons de courbure $M\mu$ et $N\nu$ appartenant aux sommets sont représentés respectivement par $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{a^2}{b}$. La développée touche les axes aux points μ et ν.

L'équation de l'*hyperbole* se déduit de celle de l'ellipse en changeant le signe de b^2. L'expression du rayon de courbure demeure la même, mais l'équation de la développée devient

$$\left(\frac{a\alpha}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\beta}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Cette ligne est formée, comme la précédente, de quatre

; disposées symétriquement par rapport aux
tangulaires de l'hyperbole. Le rayon de cour-
répond au sommet de la courbe a pour va-

ourbe touche l'axe des x au point μ.

ation de la *parabole*

$$y^2 = 2px$$

$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2x}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sqrt{p}}{(2x)^{\frac{3}{2}}}$; et en substituant dans
le ρ du n° 180, il vient

$$\rho = \frac{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}.$$

valeurs étant substituées dans les expressions
même numéro donnent

$$\alpha = p + 3x, \qquad \beta = \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}};$$

ant x entre ces deux expressions, on trouve
ion de la développée de la parabole

$$\beta^2 = \frac{8}{27}\,\frac{(\alpha - p)^3}{p}.$$

est formée de deux parties égales placées symé-
par rapport à l'axe des x. Le rayon de cour-
appartient au sommet de la parabole est égal
loppée touche l'axe des x au point μ.

191. A l'égard de la *cycloïde*, dont on s'est occupé dans le n° 178, on a trouvé

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2R}{y}-1}, \quad \text{d'où } \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{R}{y^2}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\frac{2R}{y}-1}}=-\frac{R}{y^2};$$

et en mettant ces valeurs dans l'expression de ρ du n° 180, il vient

$$\rho=-2\sqrt{2Ry};$$

d'où l'on conclut, en rapprochant ce résultat des formules données n° 178, que le rayon de courbure est toujours double de la normale.

En substituant également les valeurs précédentes dans les expressions de α et β du n° 180, on aura

$$\alpha=x+2\sqrt{2Ry-y^2}, \qquad \beta=-y.$$

Il est visible, soit par ces expressions, soit par celle du rayon de courbure ρ, que le centre de courbure du sommet n de la cycloïde (*fig.* 36) est en ν, en prenant la distance $a\nu=an$. Pour obtenir l'équation de la développée sous la forme la plus simple, nous la rapporterons à deux nouvelles coordonnées α' et β' parallèles aux premières, et qui sont comptées à partir du point ν, dans le sens νb et dans le sens νa. Nous écrirons donc

$$\alpha=\pi R-\alpha', \qquad \beta=-2R+\beta',$$

ce qui changera les équations précédentes en

$$x'=\pi R-x-2\sqrt{2Ry-y^2}, \qquad y=2R-\beta';$$

n tire, en ayant égard à l'expression de x en y du

$$\alpha' = R\left(\pi - \text{arc cos.}\frac{R-y}{R}\right) - \sqrt{2Ry - y^2};$$

en mettant pour y sa valeur en $6'$,

$$\alpha' = R \text{ arc cos.}\frac{R-6'}{R} - \sqrt{2R6' - 6'^2}.$$

développée de la cycloïde est une autre cycloïde
a première.
proposition résulte d'ailleurs immédiatement de la
btenue ci-dessus pour le rayon de courbure. Car
de courbure devant se trouver pour le point m
ycloïde sur le prolongement de la normale, à
ance $r\mu = rm$, il s'ensuit que l'arc $r\mu$ du cercle
R, dont le centre est d, est égal à l'arc rm du
même rayon dont le centre est c. Mais l'arc rm
l'intervalle Or : donc l'arc $s\mu$ est égal à l'inter-

juons de plus que le rayon de courbure est nul
O de la cycloïde Omn. Donc l'arc $O\mu$ de la déve-
st égal au rayon de courbure $m\mu$. Ainsi la lon-
ale de la demi-cycloïde $O\mu\nu$ est $4R$; et en géné-
n plaçait au sommet de la courbe l'origine des
ées x, y, et si l'on comptait les axes du même
aurait

$$s = 2\sqrt{2Ry}.$$

propriété remarquable de la cycloïde, qui con-
reproduire par le développement, est liée à la
n suivante plus générale, et due à Jean Ber-

noulli. Si, considérant une courbe quelconque dont les extrémités touchent deux côtés d'un rectangle, on en forme la développée, puis la développée de celle-ci, et ainsi de suite à l'infini, les courbes obtenues de cette manière approcheront progressivement de se confondre avec une demi-cycloïde.

XIX. COURBES PLANES RAPPORTÉES AUX COORDONNÉES POLAIRES.

192. L'usage des *coordonnées polaires* consiste à remplacer, pour fixer la position d'un point quelconque m, les coordonnées rectangulaires x et y, représentées par Op et mp, au moyen du rayon vecteur r représenté par Om et de l'angle ω formé par ce rayon avec l'axe des x. Les nouvelles coordonnées sont liées aux premières, comme on l'a déjà remarqué n° 79, par les relations

$$x = r \cos. \omega \qquad \text{d'où} \qquad r = +\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r \sin. \omega \qquad\qquad \omega = \text{arc tang.} \frac{y}{x}.$$

Le rayon vecteur est pris toujours positivement. L'angle ω peut affecter toutes les valeurs positives ou négatives depuis zéro jusqu'à l'infini.

193. L'équation d'une ligne droite passant par le point dont les coordonnées rectangulaires sont x', y', et formant avec l'axe des x l'angle τ, étant en coordonnées rectangulaires

$$y - y' = (x - x') \text{tang.} \tau,$$

on trouvera pour l'équation de la même droite en coordonnées polaires

$$r \sin.(\omega - \tau) = r' \sin.(\omega' - \tau),$$

désignant les valeurs de r et ω qui appartiennent
ıt dont les coordonnées sont x' et y'. En effet,
$- \tau)$ représente évidemment la distance constante
;ne dont il s'agit à la parallèle menée à cette ligne
gine des coordonnées.

L'équation de la parabole, quand on place l'ori-
coordonnées au sommet, est en coordonnées rec-
'es

$$y^2 = 2px;$$

rdonnées polaires

$$r = 2p \frac{\cos.\omega}{\sin.^2\omega}.$$

'équation de l'ellipse ou de l'hyperbole en coordon-
ıngulaires, l'origine étant placée au centre, est

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

données polaires

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos.^2\omega \pm a^2\sin.^2\omega}.$$

is si l'on place l'origine des coordonnées au foyer
ıbole en remplaçant dans l'équation $y^2 = 2px$,

x, l'équation de cette courbe deviendra

$$y^2 = p(p + 2x),$$

ıt $\frac{p}{2} = r'$, r' désignant la distance du sommet au

$$y^2 = 4r'(r' + x).$$

Mettant pour x et y les valeurs données n° 192, on aura pour l'équation en coordonnées polaires

$$r = 2r' \frac{1 + \cos.\omega}{\sin.^2\omega}, \quad \text{ou} \quad r = \frac{2r'}{1 - \cos.\omega};$$

et si l'on compte l'angle ω à partir de la portion de l'axe qui est située du côté des x négatives, c'est-à-dire à partir de la portion de l'axe comprise entre le foyer et le sommet de la courbe

$$r = \frac{2r'}{1 + \cos.\omega};$$

équation qu'il est facile de déduire immédiatement des propriétés connues de la parabole.

197. Soit e l'excentricité de l'ellipse et de l'hyperbole, c'est-à-dire le rapport entre la distance du centre au foyer et le demi-grand axe ou axe réel. On aura donc $ae = \sqrt{a^2 - b^2}$ pour l'ellipse et $ae = \sqrt{a^2 + b^2}$ pour l'hyperbole. En plaçant dans l'ellipse l'origine au foyer situé du côté des x positives, et dans l'hyberbole au foyer situé du côté des x négatives, l'abscisse comptée à partir du centre sera $x + ae$ dans la première courbe, et $x - ae$ dans la seconde. Leurs équations deviendront respectivement

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{(x - ae)^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1;$$

et en substituant pour x et y les expressions du n° 192, on aura en cordonnées polaires pour l'ellipse

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos.\omega},$$

et pour l'hyperbole

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos.\omega}, \quad \text{ou} \quad r = \frac{a(e^2 - 1)}{e \cos.\omega - 1}$$

que l'on considérera la branche de la courbe la plus
ou la plus éloignée du foyer pris pour origine. Ces
:s équations se déduisent également des propriétés
: des deux courbes dont il s'agit.

Nous rechercherons maintenant les expressions diffé-
s générales qui appartiennent à la direction de la
: d'une courbe, à son aire, et à la longueur de l'arc,
n emploie les coordonnées polaires.

ı général

$$r = f(\omega)$$

n d'une courbe proposée. Si l'on demande la direc-
a courbe au point dont ω et r sont les coordonnées,
:quera que la droite formant l'angle τ avec l'axe à
quel l'angle ω est compté, dont l'équation

$$r = r' \frac{\sin.(\omega' - \tau)}{\sin.(\omega - \tau)} \quad .$$

née n° 193, sera tangente à la courbe au point dont
onformément aux principes exposés article XVI), si
de $\frac{dr}{d\omega}$ déduite de l'équation de la droite est égale en
ı la valeur du même coefficient différentiel déduite
ion de la courbe. Or, en différentiant l'expression
e de r, on trouve

$$\frac{dr}{d\omega} = -r' \frac{\sin.(\omega' - \tau)\cos.(\omega - \tau)}{\sin.^2(\omega - \tau)}$$

$$\frac{dr}{d\omega} = -r \cot.(\omega - \tau);$$

le τ formé par la courbe avec l'axe à partir duquel

on compte l'angle ω est déterminé en général par l'équation

$$\cot.(\tau - \omega) = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega},$$

$\frac{dr}{d\omega}$ représentant le coefficient différentiel du premier ordre de la fonction $r = f(\omega)$. Il est superflu de remarquer d'ailleurs que $\tau - \omega$ est l'angle compris entre la tangente de la courbe et le rayon vecteur.

Le même résultat peut être facilement obtenu par la géométrie. Car soient m, n (*fig.* 37) les deux points de la courbe correspondants aux valeurs ω et $\omega + d\omega$ de l'inclinaison du rayon vecteur. L'arc mq décrit au point O avec le rayon $Om = r$ aura pour longueur $rd\omega$, et nq représentera dr. Mais à la limite nous regardons mq comme une ligne droite perpendiculaire à Om, et la courbe comme coïncidant avec la tangente dans l'intervalle mn. Remarquant de plus que l'angle nmq est le complément de l'angle $\tau - \omega$, on aura comme ci-dessus

$$\cot.(\tau - \omega) = \frac{dr}{rd\omega}.$$

Si l'on nomme σ l'angle formé par la normale menée à la courbe au point m avec l'axe des x, on aura donc d'après la formule précédente

$$\text{tang.}(\sigma - \omega) = -\frac{rd\omega}{dr},$$

$\sigma - \omega$ étant l'angle formé par la normale et le rayon vecteur.

199. L'aire de la courbe, lorsque l'on emploie des coordonnées polaires, est l'espace triangulaire compris entre cette courbe, un rayon vecteur fixe (par exemple le rayon Oa (*fig* 37) qui coïncide avec l'axe), et le rayon vecteur mobile Om. Nous

erons cette aire par u. Lorsque ω augmente de $d\omega$, u croît
ngle Omn, dont l'aire, en regardant encore mn comme
ne droite, est

$$\frac{1}{2}(r + dr)rd\omega.$$

ırons donc en négligeant (comme on doit le faire en
à la limite) les quantités infiniment petites du second

$$du = \frac{1}{2}rd\omega.$$

Quant à la différentielle de l'arc de la courbe, que
ıtinuons à représenter par s, elle est évidemment ex-
puisque l'élément mn (*fig.* 37) peut être regardé à la
mme l'hypoténuse du triangle rectangle mnq, dont
sont $rd\omega$ et dr, par

$$ds = d\omega\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}.$$

posons que l'arc s augmentera en même temps que

l'on veut enfin connaître l'expression générale du
courbure en coordonnées polaires, on emploiera la
ı n° 181,

$$\rho = \frac{ds}{d\tau}.$$

ınt que de l'équation du n° 198

$$\cot.(\tau - \omega) = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega},$$

ıar la différentiation

$$-\frac{d\tau - d\omega}{\sin.^2(\tau-\omega)} = d.\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right), \text{ ou } \frac{d\tau}{d\omega} = 1 - \sin.^2(\tau-\omega)\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right).$$

Mais cette même équation donne

$$\sin.^2(\tau-\omega) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2}.$$

Donc

$$\frac{d\tau}{d\omega} = \frac{1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2 - \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)}{1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2}.$$

D'ailleurs nous avons trouvé ci-dessus

$$\frac{ds}{d\omega} = r\left[1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{r\left[1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1+2\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\omega^2}},$$

ou si l'on veut

$$\rho = \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\omega^2}}.$$

La direction de la normale étant connue d'après le n° 198, cette expression du rayon de courbure suffit pour déterminer la position du centre du cercle osculateur. Le radical $\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ peut être affecté du signe + ou du signe —. Si l'on convient de prendre le signe + il s'ensuivra que le rayon de courbure sera regardé comme positif lorsque les différen-

s seront de même signe, et comme négatif lors-
ıt de signe contraire. Nous supposons ici que
ınte dans le même sens que l'angle ω. Ainsi le
ırbure est censé positif lorsque la concavité de la
ırnée du côté de l'origine ou pôle dont émane
eur et négatif dans le cas contraire.

Courbes nommées spirales.

géomètres ont donné le nom de *spirales* à diverses
t la nature et les propriétés s'expriment d'une
s simple au moyen des coordonnées polaires.
d'Archimède a pour équation

$$r = a\omega,$$

une constante positive. La courbe commence à
pôle, et forme une infinité de révolutions autour
dont elle s'éloigne de plus en plus.
; la *spirale hyperbolique*, ainsi nommée à raison
: de son équation

$$r = \frac{a}{\omega}$$

t toujours une constante positive) avec celle de
rapportée à ses asymptotes, la courbe prend son
ne distance infinie du pôle, où elle touche une
lèle à l'axe des x dont l'équation est $y = a$ (puis-
on précédente peut s'écrire $y = a\,\frac{\sin.\,\omega}{\omega}$, et donne
ıe $\omega = 0$). Elle forme une infinité de révolutions
ôle, dont elle s'approche progressivement, mais

sans l'atteindre, puisque l'on n'a $r = 0$ qu'en attribuant à l'angle ω une valeur infinie.

204. La *spirale logarithmique*, courbe très-remarquable dont les propriétés ont été étudiées par Jacques Bernoulli, a pour équation

$$\omega = \log. r, \quad \text{ou} \quad r = a^{\omega}, \quad \text{ou enfin} \quad r = e^{la.\omega},$$

a désignant la base du système de logarithmes, que nous supposons plus grande que l'unité. La valeur OA de r qui correspond à $\omega = 0$ est égale à l'unité. Lorsque ω croît positivement à partir de zéro, r augmente de plus en plus : ainsi la courbe à partir du point A forme autour du pôle une infinité de révolutions en s'éloignant progressivement de ce point. Lorsque ω croît négativement à partir de zéro, r diminue de plus en plus : la courbe forme également à partir du point A, et en s'approchant progressivement du point O, sans l'atteindre, une infinité de révolutions.

De l'équation

$$r = e^{la.\omega}$$

on déduit

$$\frac{dr}{d\omega} = la.e^{la.\omega}, \qquad \frac{d^2r}{d\omega^2} = (la)^2.e^{la.\omega}.$$

La formule du n° 198, tang. $(\sigma - \omega) = -\dfrac{dr}{rd\omega}$, donne donc ici pour déterminer l'angle compris entre la normale et le rayon vecteur

$$\text{tang.}(\sigma - \omega) = -la.$$

Ainsi cet angle a une valeur constante.

ı rayon de courbure n° 201,

$$= \frac{r\left[1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1+2\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2-\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\omega^2}},$$

$$\rho = r\sqrt{1+(la)^2} = \frac{r}{\cos.(\sigma-\omega)}.$$

ig. 38) le centre de courbure correspondant
a spirale logarithmique, la ligne 0μ est per-
le rayon vecteur $0m$. Le rayon vecteur et le
ıre conservent un rapport constant.
les coordonnées polaires du centre de cour-
ı donc, d'après ce qui précède,

$$\omega + \frac{\pi}{2}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - r^2} = la.r;$$

ıt les valeurs de ω et r tirées de ces équations
$r = e^{la.\omega}$ de la courbe, il viendra

$$R = la.e^{la\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)},$$

nt au même,

$$R = e^{la\left(\Omega - \frac{\pi}{2} + \frac{l.la}{la}\right)},$$

ı polaire de la développée. Donc la développée
logarithmique est cette même courbe qui a
du pôle d'un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{l.la}{la}$. Il suffit

d'ailleurs, pour reconnaître que la développée est une spirale logarithmique, de remarquer que sa tangente, qui n'est autre chose que le rayon μm, forme un angle constant avec son rayon vecteur 0μ.

XX. POINTS SINGULIERS DES COURBES PLANES.

205. Les notions qui ont été exposées dans les articles XVI et suivants, et qui se rapportent à la détermination des tangentes des courbes, de leurs cercles osculateurs, ou en général des courbes osculatrices, sont fondées sur l'emploi du théorème de Taylor, et supposent en général que les coefficients différentiels de la fonction qui exprime la valeur de l'ordonnée au moyen de l'abscisse prennent, pour le point de la courbe que l'on considère, des valeurs finies et déterminées. Il est donc nécessaire, conformément à ce qu'on a vu dans l'article X, que la figure de la courbe soit continue près de ces points; et de plus il ne faut pas que la fonction dont il s'agit se trouve, pour la valeur de l'abscisse qui leur appartient, dans les cas d'exception qui ont été remarqués dans ce même article. Lorsqu'il en est autrement, la figure des courbes est en général affectée d'une manière particulière et présente ce qu'on nomme un *point singulier*.

Dans la plupart des cas, l'existence des points singuliers tient à ce que la courbe a deux ou plusieurs branches qui se réunissent dans les points dont il s'agit. Néanmoins les courbes qui ont un cours unique, ou qui sont partagées en plusieurs branches distinctes qui ne se croisent point, présentent quelquefois des points remarquables que l'on a généralement compris sous la dénomination de points singuliers.

l'on ait formé les coefficients différentiels
tc., de l'ordonnée y de la courbe exprimée
bscisse x.
oefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ devient nul pour
a de l'abscisse, les autres coefficients conser-
finies, la tangente de la courbe au point cor-
parallèle à l'axe des x; et l'ordonnée, confor-
l'on a vu dans l'article XIV, est un maximum
n.
ent différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$ devient seul nul, tous les
ant des valeurs finies, le rayon de courbure
sens de la courbure change. Il y a un *point*
ent différentiel du troisième ordre $\frac{d^3y}{dx^3}$ devenait
indiquerait que $\frac{d^2y}{dx^2}$ est un maximum ou un
ais cette circonstance ne peut en général se re-
la figure de la courbe.
x premiers coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$
n même temps, on se trouverait dans le cas re-
fin du n° 145, c'est-à-dire qu'il y aurait un point
ans lequel la tangente de la courbe serait paral-
es x.
e les cas où quelques-uns des coefficients diffé-
nent des valeurs nulles, on doit considérer ceux
ent des valeurs infinies.
ficient différentiel du premier ordre $\frac{dy}{dx}$ prend

une valeur infinie, la tangente de la courbe est parallèle à l'axe des y. Cela peut arriver dans quatre cas : en un point L (*fig.* 39) formant dans le sens de x la limite de l'espace occupé par la courbe; en M lorsque l'ordonnée est infinie et que la courbe a pour asymptote une ligne parallèle à l'axe des y; en N lorsqu'il y a un point d'inflexion; et enfin en O dans un *point de rebroussement.*

Si le coefficient différentiel du second ordre devenait infini, celui du premier ordre ne l'étant pas, il en résulterait que la valeur du rayon de courbure serait nulle.

207. Considérons maintenant les cas où les courbes offrent plusieurs branches dont la réunion ou le croisement donne lieu à des points singuliers. Les cas dont il s'agit ont une liaison intime avec ceux qui ont été remarqués nos 90 à 93. En effet, une courbe ne peut avoir plusieurs branches qu'autant que la fonction $y = f(x)$ qui représente l'ordonnée contient explicitement ou implicitement des radicaux pairs auxquels on doit attribuer un double signe. En général à chaque valeur de x répondent plusieurs valeurs de y, et autant de valeurs de chacun des coefficients différentiels qui appartiennent respectivement aux différentes branches de la courbe. Mais si la valeur particulière $x = a$ fait disparaître un radical dans $f(x)$, et réduit par là les valeurs de y à un moindre nombre, deux ou plusieurs branches de la courbe se réunissent dans le point correspondant, qui devient ce que l'on nomme un *point multiple.* On a vu d'ailleurs aux numéros cités qu'il fallait ici distinguer deux cas.

1° Lorsque le radical disparaît dans $f(x)$ pour la valeur $x = a$ parce que cette valeur rend nul ce radical même, le développement de $f(a+h)$ contient alors des puissances fractionnaires de h, et par conséquent les coefficients différentiels doivent devenir infinis à partir d'un certain ordre.

radical disparaît dans $f(x)$ parce que la va-
l nul un certain facteur $(x-a)^m$ à exposant
ont ce radical est affecté, mais reparaît dans
différentiels après un certain nombre de diffé-
formule de Taylor subsiste. Il n'en serait pas
exposant m était fractionnaire : on rentrerait
cas précédent et on trouverait, à partir d'un
des valeurs infinies pour les coefficients diffé-

'après ce qui précède, qu'un point multiple
liqué par les valeurs infinies que prendraient
ts différentiels du premier ordre et des ordres
Mais cette indication n'est pas certaine, puis-
e chose peut avoir lieu dans un point d'inflexion
nte de la courbe serait parallèle à l'axe des y.

encore qu'en un point multiple les coefficients
peuvent conserver des valeurs finies, et les pre-
tre eux offrir, par exemple, des valeurs nulles.
nstance peut également avoir lieu pour un point
où la tangente de la courbe serait parallèle à l'axe
is si les premiers coefficients différentiels réduits à
suivis d'autres coefficients différentiels affectés de
et si d'ailleurs $f(x)$ est réelle près de $x=a$, on est
ré que le point dont il s'agit est formé par la réu-
plusieurs branches de la courbe qui ont entre elles
ct dont l'ordre est marqué par le nombre des coeffi-
fférentiels qui reçoivent la valeur commune zéro.

néral, pour juger exactement de la nature d'un point
r, il faut discuter, par le développement de $f(a \pm h)$
ou par un autre moyen quelconque, le cours de la
près de ce point.

208. Le cas le plus simple auquel s'appliquent les considérations précédentes est celui du point M (*fig.* 40) qui forme la limite d'une courbe dans le sens des x. On doit considérer les deux parties Mm, Mm' comme deux branches distinctes (soit qu'elles s'étendent à l'infini, ou qu'elles se rejoignent pour former une courbe fermée), qui se réunissent en M. Les coefficients différentiels du premier ordre et des ordres supérieurs sont infinis pour la valeur de l'abscisse qui répond à un tel point. La même chose a lieu lorsque la limite de la courbe est formée par un point de rebroussement N.

Remarquons que le point N, où les deux branches de la courbe sont du même côté de la tangente commune, est un point de rebroussement de la *seconde espèce*; et que le point O de la figure du n° 206, où les deux branches de la courbe sont placées de part et d'autre de la tangente commune, est un point de rebroussement de la *première espèce*. Le cas où tous les coefficients différentiels deviennent infinis peut répondre d'ailleurs à divers points multiples O, P, dans lesquels se réunissent deux ou plusieurs branches de courbe qui touchent (en se croisant ou non) une même ligne parallèle à l'axe des y.

209. A l'égard des cas où les premiers coefficients différentiels deviennent nuls, tandis que les coefficients différentiels suivants conservent des valeurs finies affectées de radicaux, ils donnent lieu à des points multiples analogues aux points O et P, mais dans lesquels la tangente de la courbe est parallèle à l'axe des x.

Mais si la première différentiation a suffi pour faire disparaître le facteur dont le radical était affecté dans la fonction et qui devenait nul pour la valeur particulière $x = a$, en

ical se retrouvant dans $\frac{dy}{dx}$, ce coefficient dif-
te plusieurs valeurs finies distinctes, on aura
multiple Q dans lequel les branches de la
seront sans se toucher. Et si dans un tel point
rs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ se trouvait nulle, $\frac{d^3y}{dx^3}$ restant finie,
exion dans une des branches de la courbe.

terminerons enfin en observant que l'on a
ts isolés ou conjugués certains points dont les
satisfont à l'équation proposée entre x et y,
nt entièrement séparés de la ligne que cette
présente. Il existera, par exemple, un point
orrespondant à la valeur $x=a$ si cette valeur
tre dans la fonction $y=f(x)$ un radical tel, que
$f(a)$ soit réelle, et les valeurs voisines $f(a\pm h)$
s. Exemple : $y=(x-a)^m\sqrt{(x-a)^2-b^2}$.

XI. PLANS TANGENTS ET NORMALES AUX SURFACES COURBES.

Nous récapitulerons ici succinctement les formules
élémentaires de la géométrie à trois dimensions.
rection d'une ligne droite passant par l'origine des
nées est fixée par les trois angles α, β, γ formés par
gne avec les parties des axes sur lesquels on compte
ordonnées positives x, y, z. Les cosinus de ces angles
videmment entre eux dans les mêmes rapports que les
onnées x, y, z et l'on a les relations

$$\frac{x}{y}=\frac{\cos.\alpha}{\cos.\beta},\qquad \frac{x}{z}=\frac{\cos.\alpha}{\cos.\gamma},\qquad \frac{y}{z}=\frac{\cos.\beta}{\cos.\gamma},$$

dont deux quelconques entraînent la troisième. De plus les coordonnées du point de la ligne située à la distance 1 de l'origine étant respectivement cos. α, cos. β, cos. γ, il en résulte

$$\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma=1.$$

D'après cela

$$x=az,\qquad y=bz$$

étant les équations des projections de la droite sur les plans des xz et des yz, on a

$$a=\frac{\cos.\alpha}{\cos.\gamma},\qquad b=\frac{\cos.\beta}{\cos.\gamma},$$

d'où

$$\cos.\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ \cos.\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ \cos.\gamma=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

On peut donner à volonté dans ces formules au radical le signe + ou le signe —, pourvu qu'on lui donne dans toutes trois le même signe. Suivant le signe donné à ce radical, les angles α, β et γ appartiendront à l'une ou à l'autre des parties de la ligne qui sont séparées par l'origine des coordonnées. Si on le prend positivement, ces angles se rapporteront toujours à la partie de la ligne qui est située du côté des z positives, ou qui forme un angle aigu avec la partie positive de l'axe des z.

212. Soient deux droites passant par l'origine des coor-

nant respectivement avec les axes les angles
γ'. La distance des points de ces droites placés
de l'origine est le double du sinus de la moitié
lles comprennent. Ainsi, appelant ω cet angle,

$$\text{os.}\alpha - \cos.\alpha')^2 + (\cos.6 - \cos.6')^2 + (\cos.\gamma - \cos.\gamma')^2,$$

se réduit à

$$1 - (\cos.\alpha \cos.\alpha' + \cos.6 \cos.6' + \cos.\gamma \cos.\gamma').$$

$$= \cos.^2 \frac{\omega}{2} - \sin.^2 \frac{\omega}{2} = 1 - 2 \sin.^2 \frac{\omega}{2}. \text{ Donc}$$

$$\text{.}\omega) = \cos.\alpha \cos.\alpha' + \cos.6 \cos.6' + \cos.\gamma \cos.\gamma'.$$

eux droites sont perpendiculaires l'une sur l'autre

$$\cos.\alpha \cos.\alpha' + \cos.6 \cos.6' + \cos.\gamma \cos.\gamma' = 0.$$

équations des deux droites étant respectivement,

pour la première $\quad x = az, \quad y = bz$
pour la seconde $\quad x = a'z, \quad y = b'z$

nt perpendiculaires entre elles si l'on a

$$aa' + bb' + 1 = 0.$$

. L'équation d'un plan passant par l'origine des coor-
es étant

$$z = fx + gy\,;$$

et les équations d'une droite passant par cette même origine

$$x = az, \qquad y = bz;$$

la droite sera comprise dans le plan si ces trois équations peuvent être satisfaites par les mêmes valeurs de x, y, z, ce qui donne la condition

$$1 = af + bg.$$

214. L'équation générale d'un plan est

$$z = fx + gy + h,$$

x, y étant deux variables indépendantes et z une fonction de ces variables. Soit un point quelconque de l'espace dont les coordonnées sont x, y, z; et concevons que de ce point l'on ait mené une droite à l'un quelconque des points du plan dont nous désignerons les coordonnées par x', y', z'. La distance de ces points est exprimée par

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

x', y' et z' satisfaisant à l'équation

$$z' = fx' + gy' + h.$$

Or la droite dont il s'agit sera perpendiculaire au plan si l'expression précédente (dans laquelle il faut considérer z' comme une fonction des deux variables indépendantes x' et y') est un minimum. Pour connaître la direction de la perpendiculaire au plan, on égalera donc séparément à zéro, conformément à ce qu'on a vu dans les numéros 147 et suivants, les différentielles de cette expression prises par rapport

qui donnera

$$\frac{}{}(z-z')=0, \qquad y-y'+\frac{dz'}{dy'}(z-z')=0,$$

appartiennent à la perpendiculaire cherchée et ient la direction. En y mettant pour $\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ rées de l'équation du plan, elles deviennent

$$f(z-z')=0, \qquad y-y'+g(z-z')=0.$$

it que les angles formés par la perpendiculaire sé avec les axes des x, des y et des z, étant re- λ, μ, ν, on a

$$\frac{f}{\sqrt{f^2+1}}, \quad \cos.\mu=\frac{-g}{\sqrt{f^2+g^2+1}}, \quad \cos.\nu=\frac{1}{\sqrt{f^2+g^2+1}}.$$

formés par le plan proposé avec les plans des des xy ne diffèrent point d'ailleurs des angles

is, l'angle compris entre deux plans est égal à is entre deux droites perpendiculaires à ces appelant φ l'angle compris entre les plans dont ont respectivement

$$z=fx+gy+h$$
$$z=f'x+g'y+h'$$

$$\cos.\varphi=\frac{ff'+gg'+1}{\sqrt{f^2+g^2+1}.\sqrt{f'^2+g'^2+1}}.$$

n nécessaire pour que les deux plans représentés

par les équations précédentes soient perpendiculaires l'un à l'autre, est donc exprimée par l'équation

$$ff' + gg' + 1 = 0.$$

216. Si l'équation du plan est donnée sous la forme

$$K + Lx + My + Nz = 0,$$

on aura pour les équations de la normale

$$z - z' = \frac{N}{L}(x - x'), \qquad z - z' = \frac{N}{M}(y - y');$$

et les cosinus des angles formés par la normale avec les axes des x, des y et des z, ou des angles formés par le plan proposé avec les plans des yz, des xz et des xy, seront respectivement

$$\cos.\lambda = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \cos.\mu = \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \cos.\nu = \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$$

217. Considérons maintenant une surface quelconque dont l'équation est représentée en général par

$$z = f(x, y),$$

x, y désignant toujours deux variables indépendantes, et proposons-nous de déterminer le plan tangent et la normale menée au point de cette surface, dont x', y', z' désignent les coordonnées. On pourrait d'abord connaître la direction de la normale par la même considération qui a été employée n° 213, car il est évident que la plus courte distance d'un point quelconque de la normale à la surface est dirigée suivant cette ligne elle-même. On trouverait donc, comme dans le

pour les équations de la normale,

$$\frac{dz'}{dx'}(z-z')=0, \qquad y-y'+\frac{dz'}{dy'}(z-z')=0,$$

ésentant les coefficients différentiels partiels de

' déduits de l'équation $z'=f(x',y')$, à laquelle faire les coordonnées du point de la surface que ere. Mais il convient mieux ici de déterminer le it d'après des notions semblables à celles qui ont ées dans l'article XVI.

est tangent à une surface lorsque aucun autre plan sser entre la surface et le plan dont il s'agit. x', s abscisses d'un point quelconque de la surface les ordonnées des points voisins seront exprimées l d'après ce qu'on a vu n° 138, par

$$\frac{dz'}{dx'}h+\frac{dz'}{dy'}i+\frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^2z'}{dx'dy'}hi+\frac{d^2z'}{dy'^2}\frac{i^2}{2}+\text{etc.}$$

e, l'équation d'un plan quelconque passant par le nt les coordonnées sont x', y', z' étant

$$z-z'=f(x-x')+g(y-y'),$$

onnées des points voisins de celui-ci sont représen- r

$$z'+fh+gi.$$

érence entre les ordonnées de la surface et celles du est donc

$$-f\Big)h+\Big(\frac{dz'}{dy'}-g\Big)i+\frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^2z'}{dx'dy'}hi+\frac{d^2z'}{dy'^2}\frac{i^2}{2}+\text{etc.}$$

Mais si nous supposons les coefficients f; g de l'équation du plan déterminé par la condition de faire disparaître les termes du premier ordre, c'est-à-dire si nous posons

$$f = \frac{dz'}{dx'}, \qquad g = \frac{dz'}{dy'},$$

cette différence se réduira à

$$\frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^2z'}{dx'dy'}hi + \frac{d^2z'}{dy'^2}\frac{i^2}{2} + \text{etc.};$$

et l'on reconnaîtra, par le même raisonnement qui a été fait n° 160, qu'en attribuant à h et i des valeurs de plus en plus petites, on pourra toujours la rendre moindre que pour tout autre plan à l'égard duquel on n'aurait point satisfait à la condition précédente.

L'équation d'un plan tangent à la surface proposée au point dont les coordonnées sont x', y', z' est donc, d'après ce qui précède,

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y');$$

et l'on en déduit immédiatement pour les équations de la normale, conformément au n° 213,

$$x - x' + \frac{dz'}{dx'}(z - z') = 0, \qquad y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z') = 0.$$

$\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$ représentent les valeurs des coefficients différentiels partiels réduits à l'équation $z = f(x, y)$ qui appartiennent au point de contact.

Ainsi, en représentant par λ, μ, ν, les angles formés par

ıvec les axes des x, des y et des z, on a

$$\frac{-\frac{dz'}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2+1}},\qquad \cos.\mu=\frac{-\frac{dz'}{dy'}}{\sqrt{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2+1}},$$

$$\cos.\nu=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2+1}},$$

sions conviennent également aux angles formés n tangent avec les plans des yz, des xz et des ı y prend le radical positivement, elles convien- partie de la normale qui est située, par rapport ce, du côté des z positives, ou qui forme un an- ıvec les z positives.

l'équation de la surface proposée est présentée sous

$$F(x, y, z)=0,$$

ı pour équations différentielles du premier ordre, ce qu'on a vu n° 45,

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}=0,\qquad \frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy}=0.$$

ion du plan tangent deviendra

$$\frac{dF}{dx'}(x-x')+\frac{dF}{dy'}(y-y')+\frac{dF}{dz'}(z-z')=0;$$

uations de la normale seront

$$z-z'=\frac{\frac{dF}{dz'}}{\frac{dF}{dx'}}(x-x'),\qquad z-z'=\frac{\frac{dF}{dz'}}{\frac{dF}{dy'}}(y-y');$$

enfin, les cosinus des angles λ, μ, ν, formés par la normale avec l'axe des x, des y et des z, ou par le plan tangent avec les plans des yz, des xz et des xy, auront pour expressions

$$\cos.\lambda = \frac{\frac{dF}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz'}\right)^2}}, \quad \cos.\mu = \frac{\frac{dF}{dy'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz'}\right)^2}},$$

$$\cos.\nu = \frac{\frac{dF}{dz'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz'}\right)^2}}.$$

219. Un plan tangent peut, en général, avoir avec une surface un seul point commun, qui est le point de contact; ou bien il peut la couper suivant une certaine ligne; ou simplement la toucher sans la couper; ou, enfin, la toucher et la couper en même temps dans toute l'étendue de cette ligne. On remarque les cas où le plan tangent touche la surface dans tous les points d'une même ligne droite, propriété qui appartient aux surfaces cylindriques et coniques, et plus généralement aux surfaces développables; et le cas où le plan tangent, coupant la surface suivant une ligne droite, la touche dans un seul point de cette ligne, propriété qui appartient aux surfaces gauches.

Les coordonnées x, y, z de la ligne d'intersection du plan qui touche la surface au point dont les coordonnées sont x', y', z', satisfont évidemment aux deux équations

$$F(x, y, z) = 0$$
$$\frac{dF}{dx'}(x - x') + \frac{dF}{dy'}(y - y') + \frac{dF}{dz'}(z - z') = 0.$$

En éliminant entre elles l'une quelconque des variables x,

. les équations des projections de cette ligne
ɔordonnés.
ame en général *plan normal* à une surface,
onné, tout plan mené par ce point perpendi-
plan tangent. La normale est la ligne d'inter-
. les plans normaux. Soit, en général,

$$z - z' = f(x - x') + g(y - y')$$

n plan quelconque passant par le point de la
les coordonnées sont x', y', z'. Ce plan sera
surface, si les constantes f et g satisfont à l'é-

$$1 + f\frac{dz'}{dx'} + g\frac{dz'}{dy'} = 0,$$

, par la condition que le plan normal soit per-
: au plan tangent, d'après les nos 215 et 218;
ɔndition que le plan normal contienne la nor-
·ès les nos 213 et 216.
ıs remarquerons enfin que si l'on mène un plan
: par le point de contact commun à la surface et
ı tangent, l'intersection de ce plan avec le plan
:a tangente à l'intersection de ce même plan avec
proposée.

XXII. COURBES A DOUBLE COURBURE.

ne ligne courbe quelconque existant dans l'espace
ɔe par ses projections sur deux des plans coordon-
ınt

$$y = f(x), \qquad z = F(x)$$

les équations des projections d'une courbe proposée sur les plans des xy et des xz. En éliminant x entre ces deux équations, on en trouvera une troisième entre y et z, qui appartiendra à la projection de la courbe sur le plan des yz. Dans ces équations, x est la variable indépendante, y, z sont des fonctions déterminées de x. La position d'un point d'une courbe est en effet déterminée quand on se donne une seule des coordonnées de ce point.

223. Considérons les deux points de la courbe auxquels appartiennent les abscisses x et $x+\Delta x$. La sécante passant par ces deux points, tend à se confondre, à mesure que Δx diminue, avec la tangente menée à la courbe dans le point dont l'abscisse est x. Or, les trois coordonnées du premier point étant x, y, z, et celles du second $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, Δy et Δz étant déterminées par les équations précédentes, les cosinus des angles formés par la sécante avec les axes des x, des y et des z sont exprimés respectivement par

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}},\quad \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}},\quad \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}.$$

ou bien

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}},\quad \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}},\quad \frac{\frac{\Delta z}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}.$$

Mais à mesure que Δx approche de devenir égale à zéro, les rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ approchent des limites $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, c'est-à-dire des coefficients différentiels des fonctions $y=f(x)$,

représentent les ordonnées des projections sur les plans des xy et des xz. Donc, appe- es angles formés par la tangente de la courbe des x, des y et des z, on a

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},\quad \cos.\beta=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}};$$

$$\cos.\gamma=\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},$$

ı l'on substituera pour $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ leurs valeurs es équations $y=f(x)$, $z=F(x)$.

. expressions précédentes donnent immédiatement ns de la tangente. Soient en général

$$y-y'=m(x-x'),\qquad z-z'=n(x-x'),$$

ons d'une droite quelconque passant par le point ırbe dont les coordonnées sont x', y', z'. Cette ıchera la courbe, si l'on a (d'après ce qu'on a),

$$m=\frac{\cos.\alpha}{\cos.\beta}=\frac{dy'}{dx'},\qquad n=\frac{\cos.\gamma}{\cos.\alpha}=\frac{dz'}{dx'}.$$

uations de la tangente sont donc

$$\frac{dy'}{dx'}(x-x'),\quad z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x'),\quad z-z'=\frac{\frac{dz'}{dx'}}{\frac{dy'}{dx'}}(y-y');$$

et, comme il était aisé de le prévoir, les projections de la tangente sont tangentes aux projections de la courbe.

225. On en déduit également l'équation du plan normal. Soit en général

$$z - z' = f(x - x') + g(y - y')$$

l'équation d'un plan passant par le point de la courbe dont les coordonnées sont x', y', z'. On voit par le n° 214, que ce plan sera perpendiculaire à la tangente de la courbe, si l'on a

$$f = -\frac{1}{\frac{dz'}{dx'}}, \quad g = -\frac{\frac{dy'}{dx'}}{\frac{dz'}{dx'}}.$$

L'équation du plan normal dont il s'agit est donc

$$x - x' + \frac{dy'}{dx'}(y - y') + \frac{dz'}{dx'}(z - z') = 0.$$

226. Enfin, désignant toujours par

$$y - y' = m(x - x'), \qquad z - z' = n(x - x'),$$

les équations d'une ligne quelconque passant également par le point de la courbe, dont les coordonnées sont x', y', z', cette ligne sera comprise dans le plan normal, et par conséquent perpendiculaire à la courbe, si les constantes m et n satisfont à l'équation

$$1 + m\frac{dy'}{dx'} + n\frac{dz'}{dx'} = 0.$$

227. Pour trouver l'expression de la différentielle de l'arc

courbe, soient M et N (*fig.* 41) les points dont les
onnées sont respectivement x, y, z et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$,
z. La longueur de la corde MN sera $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.
nené par le point M la tangente MT à la courbe, et
abaissé sur cette tangente la perpendiculaire NT,
ons l'arc de la courbe MN sur le plan MNT. Appe-
l'angle MNT compris entre la corde et la tangente,
it que cette projection de l'arc MN sera plus grande
IN, et plus petite que MT + NT, c'est-à-dire plus
que

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}(\cos.\varphi+\sin.\varphi).$$

appelant Δs la projection de l'arc MN dont il s'agit,

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta y^2}(1+\omega), \text{ ou } \frac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}(1+\omega)$$

ntité ω étant $<\varphi-\frac{\varphi^2}{2}-$ etc. Or, si l'on suppose
r tende à devenir égale à zéro, l'arc de la courbe
à se confondre avec sa projection, et l'angle φ ten-
devenir nul. On peut donc regarder la limite du rap-
$\frac{s}{x}$ comme ne différant pas de la limite du rapport de
le la courbe à Δx; et, en désignant cette dernière
par $\frac{ds}{dx}$, écrire

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, \quad \text{et} \quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

nnera le signe + ou le signe — au radical, suivant

que l'arc s augmentera ou diminuera quand on fera croître l'abscisse x.

228. On peut d'ailleurs faire ici une remarque analogue à celle du n° 169. Les valeurs des cosinus des angles α, β, γ formés par la tangente à la courbe avec les axes des x, des y et des z, s'exprimeront par

$$\cos.\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos.\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos.\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

On donnera à la différentielle ds, dans ces expressions, le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que les angles α, β, γ seront comptés à partir de l'une ou de l'autre des portions de la tangente qui sont séparées par le point de contact.

229. Lorsqu'on suppose, comme on l'a fait n° 222, une courbe donnée par ses deux projections sur les plans des xy et des xz, on regarde cette courbe comme étant l'intersection de deux surfaces cylindriques ayant ces projections pour bases, et dont les arêtes sont respectivement perpendiculaires aux deux plans. Mais une courbe peut être considérée d'une manière plus générale, comme étant l'intersection de deux surfaces quelconques représentées par les équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad F(x, y, z) = 0.$$

Les ordonnées y et z sont alors des fonctions implicites de l'abscisse x. En appliquant donc les notions présentées dans les n°s 44 et 45, on différentiera ces deux équations, ce qui donne

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0;$$

irant les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{df}{dx}\frac{dF}{dz}-\frac{dF}{dx}\frac{df}{dz}}{\frac{dF}{dy}\frac{df}{dz}-\frac{df}{dy}\frac{dF}{dz}},\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{\frac{df}{dx}\frac{dF}{dy}-\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}}{\frac{dF}{dz}\frac{df}{dy}-\frac{df}{dz}\frac{dF}{dy}}.$$

leurs doivent être substituées dans les formules des ›s précédents. On pourrait ensuite en éliminer y ı moyen des équations proposées $f(x, y, z)=0$, , $z)=0$.

Remarquons d'ailleurs que, d'après le n° 218, si signe par x', y', z' les coordonnées d'un point de la ›roposée, les équations des deux plans menés par ıt tangentiellement aux deux surfaces courbes, dont gne proposée est l'intersection, auront respective- ›our équations

$$\frac{df}{dx'}(x-x')+\frac{df}{dy'}(y-y')+\frac{df}{dz'}(z-z')=0,$$
$$\frac{dF}{dx'}(x-x')+\frac{dF}{dy'}(y-y')+\frac{dF}{dz'}(z-z')=0.$$

ces équations appartiennent à la tangente de la et en déterminent la direction. En général, on a ıations de la tangente en remplaçant dans les équa- lifférentielles de la courbe, dx', dy', dz' par $x-x'$, , $z-z'$.

osculateur. Rayons de la première courbure et de la seconde courbure.

Les notions exposées dans l'article XVI sur le con- ›s courbes planes, s'appliquent généralement (comme

on a pu le voir dans l'article précédent) au contact des lignes et des surfaces.

Si l'on considère une première ligne représentée par les équations

$$y = f(x), \qquad z = \mathrm{F}(x),$$

puis une seconde ligne représentée par les équations

$$y = \varphi(x), \qquad z = \Phi(x),$$

on verra qu'en supposant que ces lignes se rencontrent au point dont les coordonnées sont x, y, z, on aura

$$y + \frac{d.f(x)}{dx}h + \frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.}, \quad z + \frac{d.\mathrm{F}(x)}{dx}h + \frac{d^2.\mathrm{F}(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.},$$

pour les ordonnées du point de la première courbe correspondante à l'abscisse $x + h$; et

$$y + \frac{d.\varphi(x)}{dx}h + \frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.}, \quad z + \frac{d.\Phi(x)}{dx}h + \frac{d^2.\Phi(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.},$$

pour les ordonnées du point de la seconde courbe correspondant à la même abscisse. Les différences de ces ordonnées seront donc respectivement

$$d = \left(\frac{d.f(x)}{dx} - \frac{d.\varphi(x)}{dx}\right)h + \left(\frac{d^2.f(x)}{dx^2} - \frac{d^2.\Phi(x)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2} + \text{etc.},$$
$$\mathrm{D} = \left(\frac{d.\mathrm{F}(x)}{dx} - \frac{d.\Phi(x)}{dx}\right)h + \left(\frac{d^2.\mathrm{F}(x)}{dx^2} - \frac{d^2.\Phi(x)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2} + \text{etc.},$$

et l'on aura

$$\sqrt{d^2 + \mathrm{D}^2}$$

expression de la distance des points des deux courbes l s'agit. Or, on verra par les mêmes raisonnements yés dans l'article XVI, que les constantes arbi- qui entrent dans les équations $y = \varphi(x)$, $z = \Phi(x)$ déterminées de manière à satisfaire aux conditions $= \frac{d.f(x)}{dx}$, $\frac{d.\Phi(x)}{dx} = \frac{d.F(x)}{dx}$, la seconde courbe aura ı première un contact du premier ordre, et qu'aucune courbe ne pourrait en approcher davantage, à moins assujettie aux mêmes conditions. On verra également l'on satisfait de plus aux équations $\frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2} = \frac{d^2.f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2.\Phi(x)}{dx^2} = \frac{d^2.F(x)}{dx^2}$, les deux courbes auront un contact du l ordre, et qu'aucune autre courbe ne pourrait appro- lavantage de la première, à moins d'être assujettie aux s conditions. Et ainsi de suite.

. Le contact d'une courbe quelconque avec un plan être considéré de la même manière. Les équations de urbe proposée étant toujours

$$y = f(x), \qquad z = F(x),$$

n général

$$z - z' = m(x - x') + n(y - y')$$

tion d'un plan quelconque passant par le point de rbe dont les coordonnées sont x', y', z'. Si l'abscisse x' t $x' + h$, on aura pour le point correspondant de la

$$+ \frac{dy'}{dx'} h + \frac{d^2y'}{dx'^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.}, \qquad z = z' + \frac{dz'}{dx'} h + \frac{d^2z'}{dx'^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.};$$

et pour le point du plan qui répond aux abscisses $x'+h$ et $y'+\frac{dy'}{dx'}h+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{2}+\text{etc.}$,

$$z-z'=mh+n\left(\frac{dy'}{dx'}h+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{2}+\text{etc.}\right)$$

Prenant maintenant la différence des valeurs de z qui appartiennent au plan et à la courbe, on trouve pour l'expression de la différence

$$\left(\frac{dz'}{dx'}-m-n\frac{dy'}{dx'}\right)h+\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}-n\frac{d^2y'}{dx'^2}\right)\frac{h^2}{2}+\text{etc.}$$

Si l'on veut donc en premier lieu que le plan soit tangent à la courbe, il faudra que les constantes m, n satisfassent à l'équation

$$\frac{dz'}{dx'}-m-n\frac{dy'}{dx'}=0\,;$$

et il est facile de reconnaître que cette équation exprime que le plan doit passer par la tangente à la courbe, en se rappelant ce qui a été dit n° 213, et ayant égard aux équations de la tangente données n° 224.

Cette équation ne suffit pas pour déterminer m et n, et effectivement il existe une infinité de plans passant par la tangente qui tous touchent la courbe. Mais si l'on pose encore l'équation

$$\frac{d^2z'}{dx'^2}-n\frac{d^2y'}{dx'^2}=0,$$

on établira entre la courbe et le plan le contact le plus intime qu'il soit possible, aucun autre plan ne pouvant passer

elui-ci et la courbe. On tire de cette seconde équa-
ésunie à la précédente,

$$n = \frac{\frac{d^2z'}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}, \qquad m = \frac{\frac{dz'}{dx'}\frac{d^2y'}{dx'^2} - \frac{dy'}{dx'}\frac{d^2z'}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

donne pour l'équation du plan nommé *plan oscu-*
, parce qu'il a un contact du second ordre avec la
e,

$$z(z-z') = \left(\frac{dz'}{dx'}\frac{d^2y'}{dx'^2} - \frac{dy'}{dx'}\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)(x-x') + \frac{d^2z'}{dx'^2}(y-y').$$

. Dans ce qui précède x est prise pour la variable
endante, y et z sont regardées comme des fonctions
Si l'on veut regarder x, y, z, comme des fonctions
autre variable indépendante quelconque, on ob-
rait l'équation du plan osculateur qui convient à ce
en remplaçant $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, et $\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{d^2z'}{dx'^2}$ par les expres-
données n° 74 pour le changement de la variable
pendante. Mais on y parviendra plus simplement en
arquant que l'équation générale d'un plan passant par
point de la courbe ayant pour coordonnées x', y', z'

$$A(x-x') + B(y-y') + z - z' = 0,$$

lonne pour ses deux équations différentielles du pre-
et du second ordre, en faisant également varier
y et z,

$$Adx + Bdy + dz = 0,$$
$$Ad^2x + Bd^2y + d^2z = 0.$$

Or, le plan sera le plan osculateur demandé si ces deux équations différentielles sont satisfaites par les valeurs dx', dy', dz' et d^2x', d^2y', d^2z' appartenant à la courbe. Déterminant donc les constantes A et B par les deux équations

$$Adx' + Bdy' + dz' = 0,$$
$$Ad^2x' + Bd^2y' + dz' = 0,$$

et substituant leurs valeurs dans l'équation générale précédente, il viendra

$$(dy'd^2z' - dz'd^2y')(x - x') + (dz'd^2x' - dx'd^2z')(y - y')$$
$$+ (dx'd^2y' - dy'd^2x')(z - z') = 0,$$

pour l'équation du plan osculateur.

Si l'on prenait x pour la variable indépendante, on devrait supposer dans cette équation $d^2x' = 0$: on retrouverait ainsi celle qui a été donnée dans le numéro précédent.

234. Considérons maintenant le contact de la courbe à double courbure proposée avec une surface sphérique dont l'équation générale est

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 = \rho^2,$$

α, β, γ désignant les coordonnées du centre, et ρ le rayon. Si cette surface passe par le point de la courbe dont x', y', z' représentent les coordonnées, on aura

$$(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 + (\gamma - z')^2 = \rho^2.$$

De plus si elle touche la courbe l'équation différentielle du premier ordre déduite de celle-ci en faisant varier seulement x', y', z', qui est

$$(\alpha - x')dx' + (\beta - y')dy' + (\gamma - z')dz' = 0,$$

être satisfaite par les valeurs de dx', dy', dz' ap-
ant aux points de la courbe. Ainsi toute surface sphé-
déterminée de manière que α, β, γ et ρ satisfassent à ces
équations touchera la courbe proposée. On voit d'ailleurs
n° 225 que la seconde de ces équations indique que le
de la surface sphérique doit se trouver sur le plan
al à la courbe proposée.

5. Si la surface sphérique a un contact du second
avec la courbe proposée, il faudra que l'équation
entielle du second ordre déduite de la précédente, qui

$$- dy'^2 + dz'^2 - (\alpha - x')d^2x' - (\beta - y')d^2y' - (\gamma - z')d^2z' = 0,$$

encore satisfaite par les valeurs des différentielles de
$'$, z', tirées des équations de la courbe. Supposant donc
différentielles déterminées de cette manière, toute sur-
sphérique pour laquelle α, β, γ et ρ satisferont aux équa-
s précédentes aura un contact du second ordre avec la
rbe proposée. Il est évident, d'ailleurs, que la dernière
ation qui vient d'être obtenue étant déduite par la diffé-
tiation de l'équation du plan normal à la courbe au
nt dont les coordonnées sont x', y', z', on peut dire qu'elle
forme en retranchant l'équation de ce plan de celle du
n normal infiniment voisin, mené à la courbe au point
nt les coordonnées sont $x' + dx'$, $y' + dy'$, $z' + dz'$.

On en conclut que le centre de la sphère osculatrice doit
é situé sur la ligne droite, qui est l'intersection des deux
ans normaux appartenant à deux points de la courbe,
nt la distance est supposée plus petite que toute grandeur
onnée.

236. Si, par le centre d'une sphère tangente à une courbe
roposée au point m, et par la tangente menée à la courbe,

au même point, on fait passer un plan, ce plan coupera évidemment la sphère suivant un grand cercle qui sera également tangent à la courbe. Ainsi une courbe quelconque a une infinité de cercles tangents dont les centres sont tous placés sur le plan normal à cette courbe.

Parmi toutes les sphères tangentes à la courbe proposée, nous distinguons les sphères osculatrices dont les centres sont placés sur l'intersection commune de deux plans normaux consécutifs ; mais, de plus, parmi les sphères osculatrices, nous distinguerons celle de ces sphères dont le rayon est le plus petit de tous, et dont le centre est situé dans le plan osculateur mené au point m de la courbe proposée. Le grand cercle suivant lequel cette sphère est coupée par le plan osculateur est non-seulement tangent à la courbe proposée dans le point m, mais de plus il a en ce point un contact du second ordre avec cette courbe, puisqu'il est l'intersection commune de deux surfaces qui ont elles-mêmes avec la courbe un contact du second ordre. Par conséquent ce cercle est le *cercle osculateur* de la courbe proposée, et il en mesure la courbure. On obtiendra évidemment le cercle osculateur dont il s'agit si aux conditions établies ci-dessus pour la détermination des quantités α, β, γ, ρ, on ajoute celle que l'équation du n° 233 soit satisfaite quand on suppose $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$. Ainsi, les coordonnées du centre et le rayon du cercle osculateur seront donnés par les quatre équations

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2=\rho^2,$$
$$dx(\alpha-x)+dy(\beta-y)+dz(\gamma-z)=0,$$
$$ds^2-d^2x(\alpha-x)-d^2y(\beta-y)-d^2z(\gamma-z)=0,$$
$$X(\alpha-x)+Y(\beta-y)+Z(\gamma-z)=0.$$

Nous supprimons les accents pour plus de simplicité ; nous

çons $dx^2 + dy^2 + dz^2$ par sa valeur ds^2; et nous pour abréger

$$yd^2z - dzd^2y,\ Y = dzd^2x - dxd^2z,\ Z = dxd^2y - dyd^2x.$$

déduit par l'élimination

$$\alpha - x = \frac{ds^2(Ydz - Zdy)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\beta - y = \frac{ds^2(Zdx - Xdz)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\gamma - z = \frac{ds^2(Xdy - Ydx)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\frac{ds^2\sqrt{(Ydz - Zdy)^2 + (Zdx - Xdz)^2 + (Xdy - Ydx)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

arquons maintenant que

$$\begin{aligned} Zdy &= (dzd^2x - dxd^2z)dz - (dxd^2y - dyd^2x)dy \\ &= (dx^2 + dy^2 + dz^2)d^2x - dx(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z) \\ &= ds^2d^2x - dxds\,d^2s = ds^3.d\left(\frac{dx}{ds}\right); \end{aligned}$$

ne

$$Zdx - Xdz = ds^2d^2y - dyds\,d^2s = ds^3.d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

$$Xdy - Ydx = ds^2d^2z - dzds\,d^2s = ds^3.d\left(\frac{dz}{ds}\right);$$

conséquent

$$Zdy)^2 + (Zdx - Xdz)^2 + (Xdy - Ydx)^2 = ds^4[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2].$$

s on trouve également

$$^2 + Y^2 + Z^2 = ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2].$$

Ainsi, les expressions précédentes peuvent s'écrire

$$\alpha - x = \frac{ds^3 . d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2},$$

$$\beta - y = \frac{ds^3 . d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2},$$

$$\gamma - z = \frac{ds^3 . d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2},$$

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 + (d^2s)^2}}.$$

Ces expressions conviendront au cas particulier où l'on prendrait l'arc s pour la variable indépendante, c'est-à-dire ds pour différentielle constante, en faisant $d^2s = 0$, et par conséquent remplaçant $d\left(\frac{dx}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dy}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dz}{ds}\right)$ par $\frac{d^2x}{ds}$, $\frac{d^2y}{ds}$, $\frac{d^2z}{ds}$.

237. On peut d'ailleurs parvenir directement à ces expressions en étendant à une courbe quelconque les notions qui ont été présentées dans le n° 185, pour le cas d'une courbe tracée dans un plan. Considérant trois points consécutifs de la courbe, savoir, le point l (*fig.* 42), dont les coordonnées sont x, y, z; le point m, dont les coordonnées sont $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; et le point n, dont les coordonnées sont $x + 2dx + d^2x$, $y + 2dy + d^2y$, $z + 2dz + d^2z$. Dans l'intervalle lm, représenté par ds, la courbe est regardée comme coïncidant avec la tangente menée au point l, et dans l'intervalle mn, représenté par $ds + d^2s$, la courbe est regardée comme coïncidant avec la tangente menée au point m. Le plan

tient les deux tangentes lm, mn, est le plan oscu-
mené à la courbe au point l. Si l'on prolonge lm
tervalle $mc = lm$, et si l'on décrit du point m comme
l'arc infiniment petit ce, l'intervalle ne représen-
s. De plus on pourra regarder ce comme une li-
oite, et supposer droits les angles que cette ligne
avec mc et mn, puisqu'ils ne diffèrent d'un angle
que d'une quantité infiniment petite. Enfin le rap-
$\frac{s}{c}$ donne la valeur de l'angle de contingence (voyez
:), en sorte que

$$\frac{ce}{cm} = \frac{ds}{\rho}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{ds^2}{ce},$$

ignant toujours le rayon de courbure. Cela posé, si
emarque que les coordonnées du point c sont $x + 2dx$,
dy, $z + 2dz$, on voit que les projections de cn sur les
des x, des y et des z sont d^2x, d^2y, d^2z. Donc

$$cn = \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2},$$

ar conséquent

$$ce = \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2},$$

résulte

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

'our déterminer maintenant la direction du rayon de
rbure, qui est parallèle à ce, on remarquera que les
inus des angles formés par lm avec les axes sont res-

pectivement $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; et que les cosinus des angles formés par mn avec les axes sont $\frac{dx}{ds}+d\left(\frac{dx}{ds}\right)$, $\frac{dy}{ds}+d\left(\frac{dy}{ds}\right)$, $\frac{dz}{ds}+d\left(\frac{dz}{ds}\right)$. Mais si, dans le triangle mce, mc et me étaient égaux à l'unité, les projections de ces lignes sur chaque axe seraient égales aux cosinus des angles qu'elles forment avec l'axe. Les projections de ce seraient donc égales aux différences de ces cosinus; d'où il résulte qu'en multipliant ces différences par cm ou ds, on aura les projections de ce. Ainsi représentant comme ci-dessus par λ, μ, ν, les angles formés par le rayon de courbure avec les axes des x, des y et des z, on a

$$ce.\cos.\lambda=ds.d\left(\frac{dx}{ds}\right),\ ce.\cos.\mu=ds.d\left(\frac{dy}{ds}\right),\ ce.\cos.\nu=ds.d\left(\frac{dz}{ds}\right);$$

ou puisque $ce=\frac{ds^2}{\rho}$,

$$\cos.\lambda=\frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dx}{ds}\right),\ \cos.\mu=\frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dy}{ds}\right),\ \cos.\nu=\frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

238. On conclut d'ailleurs de ces équations

$$\frac{ce}{ds}=\frac{ds}{\rho}=\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2},$$

expression remarquable de l'angle de contingence dans une courbe à double courbure.

On voit également que l'expression du rayon de courbure ρ peut être présentée sous la forme

$$\rho = \frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}.$$

que l'on conclurait également des transformations qui ont é données au commencement du numéro 230.

Remarquons de plus que si nous représentons, comme ans le n° 223, par α, β, γ les angles formés par la tangente menée à la courbe au point dont les coordonnées sont x, y, z; i nous appelons ω l'angle de contingence, et enfin si nous avons égard aux expressions de cos. α, cos. β, cos. γ, données n° 228, l'expression précédente se transformera en

$$\omega = \sqrt{(d.\cos.\alpha)^2 + (d.\cos.\beta)^2 + (d.\cos.\gamma)^2}.$$

Cette formule peut d'ailleurs être obtenue directement en remarquant que, si ω désigne d'abord l'angle de deux tangentes quelconques, on a en quantités finies :

$$\cos.\omega = \cos.\alpha(\cos.\alpha + \Delta\cos.\alpha) + \cos.\beta(\cos.\beta + \Delta\cos.\beta) + \cos.\gamma(\cos.\gamma + \Delta\cos.\gamma).$$

Mais on a généralement $\cos.\omega = \cos.^2 \frac{1}{2}\omega - \sin.^2 \frac{1}{2}\omega$, d'où $1 - \cos.\omega = 2\sin.^2 \frac{1}{2}\omega$. Donc

$$(2\sin.\tfrac{1}{2}\omega)^2 = 2 - 2\cos.\alpha(\cos.\alpha + \Delta\cos.\alpha) - 2\cos.\beta(\cos.\beta + \Delta\cos.\beta) - 2\cos.\gamma(\cos.\gamma + \Delta\cos.\gamma).$$

Or on peut mettre à la place du nombre 2 la quantité

$$\cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma + (\cos.\alpha + \Delta\cos.\alpha)^2 + (\cos.\beta + \Delta\cos.\beta)^2 + (\cos.\gamma + \Delta\cos.\gamma)^2;$$

réduisant ensuite, et remarquant que, quand l'angle ω est supposé infiniment petit $(2\sin.\frac{1}{2}\omega)^2 = \omega^2$, on retrouve (en

remplaçant le signe Δ par le signe d) la formule précédente. Cette formule exprime généralement l'angle infiniment petit compris entre les deux positions infiniment voisines d'une ligne dont les angles avec les axes sont exprimés par α, β, γ.

239. Les résultats précédents se rapportent à la *première courbure* de la courbe proposée, qui a lieu dans le sens du plan osculateur. Remarquons, maintenant, que deux plans osculateurs consécutifs comprennent entre eux un angle infiniment petit, qui donne la mesure de la *seconde courbure* de cette courbe. Soit Ω cet angle, et rappelons-nous que l'équation du plan osculateur, telle qu'elle est écrite dans le n° 236, étant

$$X(\alpha - x) + Y(\beta - y) + Z(\gamma - z) = 0,$$

les cosinus des angles formés par la normale à ce plan avec les axes des x, des y et des z sont représentés respectivement, d'après le n° 216, par

$$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

L'angle Ω de deux plans osculateurs consécutifs étant égal à l'angle des deux normales à ces plans, nous aurons donc, d'après ce qu'on a vu dans le numéro précédent,

$$\Omega = \sqrt{\left(d.\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2 + \left(d.\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2 + \left(d.\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2},$$

ou en développant, et ayant égard aux réductions qui s'opèrent,

$$\Omega = \frac{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)(dX^2+dY^2+dZ^2) - (XdX+YdY+ZdZ)^2}}{X^2+Y^2+Z^2},$$

encore

$$= \frac{\sqrt{(XdY-YdX)^2+(ZdX-XdZ)^2+(YdZ-ZdY)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

trouve facilement

$$^{\prime}z-dzd^3y,\quad dY=dzd^3x-dxd^3z,\quad dZ=dxd^3y-dyd^3x;$$

$$\frac{XdY-YdX}{dz}=\frac{ZdX-XdZ}{dy}=\frac{YdZ-ZdY}{dx}=$$

$$-d^2yd^2x)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)+dx(d^2yd^3z-d^2zd^2y);$$

ıséquent

$$\frac{^3y-d^2yd^3x)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)+dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y}{xd^2y-dyd^2x)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2}.$$

signe par P le rapport de l'élément ds de l'arc be à l'angle Ω compris entre les deux plans oscu- répondent aux points placés aux extrémités de t, rapport que l'on nomme quelquefois le rayon ıde courbure, ou si l'on pose $\frac{ds}{P}=\Omega$, on aura

$$\frac{y-dyd^2x)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2}{-d^2yd^2x)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)+dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)}.$$

lu rayon de la seconde courbure dépend des s du troisième ordre des coordonnées x, y, z, elle du rayon de la première courbure dépend s différentielles du second ordre.

240. Si l'on a pour tous les points d'une ligne quelconque l'équation

$$(dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2 = 0,$$

ou (ce qui revient au même) l'équation

$$(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2 = 0,$$

il en résultera, d'après les nos 236 et 237, que le rayon ρ de la première courbure sera infini, ou que deux éléments consécutifs de la ligne comprendront toujours entre eux un angle nul, c'est-à-dire seront placés dans le prolongement l'un de l'autre. L'une et l'autre des équations précédentes expriment donc d'une manière générale la condition analytique à laquelle doivent satisfaire les valeurs des coordonnées x, y, z, pour qu'elles puissent appartenir à une ligne droite.

241. Si l'on a pour tous les points d'une ligne l'équation

$$dz(d^2xd^2y - d^2yd^3x) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z) + dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y) = 0$$

il en résultera, d'après le n° 239, que le rayon P de la seconde courbure est infini, ou que deux plans osculateurs consécutifs comprennent entre eux un angle nul, c'est-à-dire coïncident l'un avec l'autre. Cette équation exprime donc, en général, la condition analytique à laquelle doivent satisfaire les valeurs des coordonnées x, y, z, pour qu'elles puissent appartenir à une courbe plane.

Développées.

D'après les nos 234 et 235, si l'on veut qu'une
it un contact du second ordre avec une courbe
dans le point dont les coordonnées sont x, y, z,
que les coordonnées α, β, γ, du centre de la
et son rayon ρ, satisfassent aux trois équations

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2=\rho^2$$
$$dx(\alpha-x)+dy(\beta-y)+dz(\gamma-z)=0$$
$$ds^2-d^2x(\alpha-x)-d^2y(\beta-y)-d^2z(\gamma-z)=0.$$

ination d'une sphère dépendant de quatre con-
andis que l'on doit satisfaire à trois équations
, il en résulte qu'il existe pour chaque point
urbe proposée une infinité de sphères oscula-
utes ces sphères ont, comme on l'a vu ci-des-
centres placés sur une ligne droite, qui est
on des deux plans normaux consécutifs menés
e proposée dans les deux points dont les coor-
ont x, y, z, et $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Cette
te est nécessairement perpendiculaire à la tan-
ée à la courbe au point dont les coordonnées
z.

t se représenter l'ensemble des plans normaux
tous les points de la courbe proposée, les
ites qui sont les intersections des plans nor-
écutifs, et la *surface développable* formée par
de ces lignes droites. Chaque plan normal
te surface dans toute l'étendue de l'arête rec-
artenant à ce plan. Cette arête est perpendicu-

laire à la tangente menée au point de la courbe proposée par laquelle passe le plan normal; et elle est le lieu des centres de toutes les sphères osculatrices appartenant à ce point. Ainsi l'on peut dire que la surface développable dont il s'agit, formée par les intersections successives des plans normaux de la courbe proposée, est le lieu des centres des sphères osculatrices de cette courbe. Si l'on se place en un point quelconque μ de la surface, et que l'on mène de ce point une normale à la courbe proposée qui la rencontre au point m, la sphère décrite du point μ comme centre, avec μm pour rayon, aura un contact du second ordre avec cette courbe.

D'après ce qui précède, on peut considérer dans les équations précédentes α, β, γ, comme des coordonnées variables appartenant à tous les points de la surface-lieu des centres des sphères osculatrices. On obtiendrait l'équation de cette surface en joignant aux équations

$$dx(\alpha-x)+dy(\beta-y)+dz(\gamma-z)=0$$
$$ds^2-d^2x(\alpha-x)-d^2y(\beta-y)-d^2z(\gamma-z)=0,$$

les deux équations de la courbe proposée. On aurait ainsi quatre équations au moyen desquelles on pourrait éliminer x, y, z : il resterait, après cette élimination, une équation en α, β, γ, qui serait l'équation cherchée.

243. Les équations précédentes subsistant toutes les fois que l'on donne à x, y, z des valeurs qui conviennent à un point de la courbe proposée, et que l'on donne en même temps à α, β, γ des valeurs qui conviennent à l'un quelconque des centres des sphères osculatrices qui appartiennent à ce point, on peut les différentier en faisant

a fois x, y, z et $\alpha, 6, \gamma$. L'équation obtenue de
ière appartiendra encore à la surface, lieu des
s sphères osculatrices. En différentiant ainsi la
équation, et supprimant les termes qui sont nuls
le la seconde, on a

$$dx d\alpha + dy d6 + dz d\gamma = 0.$$

tion différentielle met en évidence la nature de
dont il s'agit. Posons $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$
$\sqrt{d\alpha^2 + d6^2 + d\gamma^2}$; on pourra la mettre sous la

$$\frac{dx}{ds}\frac{d\alpha}{d\sigma} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d6}{d\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{d\gamma}{d\sigma} = 0,$$

qu'elle exprime que, dans quelque sens que
ace sur la surface à partir du point μ qui est
une sphère osculatrice appartenant au point m
e proposée, l'élément rectiligne $d\sigma$, que l'on
perpendiculaire à l'élément ds de cette courbe,
au point m. Cette propriété résulte effective-
que la surface est touchée par le plan normal
au point m dans toute l'étendue de la ligne,
u des centres des sphères osculatrices apparte-
int.

dérons maintenant les lignes qui peuvent être
es de la courbe proposée, celle-ci étant leur
en conservant à ces expressions le sens qui
nné dans les n°s 186 et suivants. On suppose
n fil ayant été enveloppé sur une première
e développe en maintenant constamment ce
aque point du fil décrit alors une seconde

courbe que l'on nomme développante, tandis que la première courbe est nommée développée. Le caractère géométrique de la développée consiste donc seulement dans ces deux circonstances : 1° que chaque point μ de la développée est le centre d'un cercle tangent au point correspondant m de la développante ; 2° que le rayon μm touche la développée au point μ.

D'après cela on reconnaît d'abord qu'une développée de la courbe proposée doit nécessairement se trouver sur la surface développable qui est le lieu des centres des sphères osculatrices. Car soient l, m, n, etc., plusieurs points contigus de la courbe proposée (*fig.* 42), et λ, μ, ν, etc., les points correspondants de la développée. Les points λ, μ, ν, etc., devant être les centres de cercles tangents à la courbe proposée en l, m, n, etc., devront se trouver respectivement sur les plans normaux menés à la courbe proposée aux points l, m, n, etc. Donc on passe d'un point de la développée à un autre, en passant d'un plan normal au plan normal contigu, c'est-à-dire en s'avançant sur la surface formée par les intersections successives des plans normaux. Si nous regardons les coordonnées α, β, γ non plus comme appartenant à un point quelconque de cette surface, mais à l'une des développées dont il s'agit, il faudra donc admettre en premier lieu que ces coordonnées satisfont aux équations

$$dx(\alpha - x) + dy(\beta - y) + dz(\gamma - z) = 0$$
$$ds^2 - d^2x(\alpha - x) - d^2y(\beta - y) - d^2z(\gamma - z) = 0\,;$$

et de plus qu'elles satisfont à la condition que le rayon mené du point de la développée au point correspondant de la courbe proposée soit tangent à la développée. Cette

n s'exprimera en posant

$$\frac{x}{\ }, \qquad \frac{d\beta}{d\sigma} = \frac{\beta - y}{\rho}, \qquad \frac{d\gamma}{d\sigma} = \frac{\gamma - z}{\rho}$$

$$\frac{x}{y}, \qquad \frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{\alpha - x}{\gamma - z}, \qquad \frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{\beta - y}{\gamma - z}.$$

ne de ces équations étant réunie aux deux aux équations de la courbe proposée, on tions, dont on pourra éliminer x, y, z. Il uations en α, β, γ, qui appartiendront à la is il importe de remarquer que ces deux nt des équations différentielles. Ainsi, elles pas une certaine développée. Elles expri- nière générale les caractères géométriques ent à toutes les développées de la courbe la surface développable qui contient les ières osculatrices est le lieu, et qui sont en Quant à la manière de déterminer en termes ions d'une certaine développée passant par l'on se serait donné arbitrairement sur la contient toutes, cette recherche dépend du

, d'ailleurs, qu'en concevant la courbe pro- face développable lieu des centres des sphères existant dans l'espace, on pourrait facilement surface une développée quelconque de la et, attachant un fil au point l de la courbe, ce fil tendu, on le dirigera de manière toucher la surface; et il pourra la toucher

en un point quelconque λ de la droite appartenant à cette surface, qui est située dans le plan normal à la courbe au point l. On appliquera ensuite le fil sur la surface en le maintenant constamment tendu. La ligne obtenue de cette manière sera évidemment la développée. Elle sera une *ligne de plus courte distance* sur la surface développable; et si l'on développait cette surface, elle deviendrait sur le développement une ligne droite.

245. Le tracé d'une développée peut encore s'opérer de la manière suivante : Soient $l, m, n, \ldots$ plusieurs points contigus de la courbe proposée. Ayant mené un premier rayon λl, on fera passer un plan par ce rayon et par l'élément lm de cette courbe; puis l'on marquera le point μ où ce plan coupe l'arête rectiligne de la surface développable qui est située dans le plan normal à la courbe proposée au point m. On mènera ensuite le rayon μm, on fera passer un second plan par ce rayon et par l'élément mn de la courbe, et l'on marquera le point ν où ce plan coupe l'arête rectiligne de la surface développable qui est située dans le plan normal à la courbe proposée au point n. En continuant de la même manière, les points $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ donneront la courbe cherchée.

Supposons, ensuite, que l'on développe la surface développable. Tous les plans normaux se rabattront les uns sur les autres en tournant sur leurs intersections successives, et par suite de ce rabattement la courbe proposée se trouvera réduite à un seul point, que nous désignerons par M. En effet, l'arc lm de cette courbe est perpendiculaire au plan normal passant par le point m : donc dans le rabattement du plan normal suivant sur celui-ci, le point m viendra se placer sur le point l.

arc *mn* de la courbe est perpendiculaire au
passant par le point *m* : donc dans le ra-
ı plan normal suivant sur celui-ci, le point *n*
lacer sur le point *m*. Et ainsi de suite. Or
: par là que tous les rayons λl, μm, νn, etc.,
rabattre les uns sur les autres, et se con-
ıe seule ligne droite, puisque tous se cou-
ls devront tous passer par le point M. Ainsi,
veloppées possibles de la courbe proposée de-
.r le rabattement dont il s'agit, des lignes
ant du point M dans lequel cette courbe s'est
ce qui s'accorde avec ce qui a été dit dans
récédent.

:entres de la première courbure de la courbe
ıi ont été déterminés dans les numéros 236
sont nécessairement situés sur la surface dé-
lieu des centres des sphères osculatrices.
remarquer que cette ligne n'est point géné-
: développée de la courbe proposée. Conce-
ffet, trois points consécutifs *l*, *m*, *n* de la
osée, et les trois points correspondants λ, μ,
a courbe lieu des centres de la première cour-
orte que $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$, etc., sont respective-
ons de courbure appartenant aux points *l*,
de la courbe proposée. Si la ligne $\lambda\mu\nu$.....
veloppée de *lmn*....., il faudrait que l'arc $\lambda\mu$
s le prolongement du rayon $m\lambda$, l'arc $\mu\nu$ dans
ıent du rayon $m\mu$, et ainsi de suite; ce qui
le rayon $m\mu$ viendrait couper le rayon $l\lambda$
ıe le rayon $n\nu$ viendrait couper le rayon $m\mu$
ainsi de suite. Or, cela ne pourrait arriver
e les rayons successifs $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$, etc., se-

raient situés deux à deux dans un même plan, ce qui n'est point, puisque chacun de ces rayons est situé dans les plans osculateurs menés respectivement aux points l, m, n, etc., de la courbe proposée. Les rayons de courbure $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$, etc., ne peuvent se rencontrer et former par leurs intersections successives une développée, qu'autant que la courbe proposée est plane, cas dans lequel tous les plans osculateurs coïncident avec le plan de la courbe.

La vérité de la remarque précédente deviendra encore plus palpable si l'on considère le rabattement dont il a été question dans le n° 245. En effet, chaque rayon de la première courbure de la courbe proposée est perpendiculaire à l'arête rectiligne correspondante de la surface développable lieu des centres des sphères osculatrices, et dans le rabattement des plans normaux les uns sur les autres, ce rayon de courbure et cette arête ne cesseront pas de se couper à angles droits. Donc les rayons $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$, etc., de la première courbure de la courbe proposée ne seront autre chose sur le rabattement que les perpendiculaires abaissées du point M sur les intersections successives des plans normaux. Donc ces rayons ne pourraient se confondre en une seule ligne droite (ce qui serait nécessaire pour que les points λ, μ, ν, etc., appartinssent à une développée), qu'autant que toutes les intersections seraient parallèles entre elles, ce qui ne peut avoir lieu à moins que tous ces plans osculateurs ne coïncident entre eux, c'est-à-dire à moins que la courbe proposée ne soit plane.

247. D'après le n° 235, la sphère dont le rayon ρ, et les coordonnées du centre α, β, γ, satisfont aux trois équations

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2=\rho^2. \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

$$(\alpha-x)dx+(\beta-y)dy+(\gamma-z)dz=0. \quad \ldots \quad (B)$$

$$ds^2-(\alpha-x)d^2x-(\beta-y)d^2y-(\gamma-z)d^2z=0. \quad \ldots \quad (C)$$

ntact du second ordre avec une courbe à double
proposée dans le point de cette courbe auquel
ment les coordonnées x, y, z. Ces trois équations
minant pas entièrement les quatre quantités ρ, α,
existe une infinité de sphères osculatrices à la
roposée dont il s'agit. Toutes ces sphères ont
tres placés sur la ligne droite intersection des
s normaux menés à cette courbe par les points
coordonnées sont x, y, z, et $x+dx$, $y+dy$,
es équations (B) et (C) sont celles de cette inter-

continue l'opération par laquelle les deux équa-
(C), ont été déduites de l'équation (A), c'est-à-
n différentie l'équation (C) par rapport à x, y, z
aura une quatrième équation

$$ds-(\alpha-x)d^3x-(\beta-y)d^3y-(\gamma-z)d^3z=0. \quad (D)$$

réunies aux précédentes, déterminera entière-
ntités α, β, γ et ρ. La sphère pour laquelle les
du centre α, β, γ satisferont aux trois équa-
) et (D) aura un contact du troisième ordre
be proposée dans le point de cette courbe
rdonnées sont x, y, z.
marquer d'ailleurs que les centres de toutes
yant un contact du troisième ordre avec la
sée, se trouveront placés sur l'arête de re-

broussement de la surface lieu des centres des sphères osculatrices qui est produite par les intersections successives des lignes droites, dont cette surface est le lieu. En effet, les trois équations (B), (C), (D), lorsqu'on y regarde α, β, γ comme les variables, équivalent à celle des trois plans normaux menés à la courbe proposée dans les points dont les coordonnées sont respectivement x, y, z; $x+dx, y+dy, z+dz$; et $x+2dx+d^2x$, $y+2dy+d^2y$, $z+2dz+d^2z$. L'équation (B) est celle du plan normal à la courbe au point (x, y, z); la somme des équations (B) et (C) donne l'équation du plan normal au point suivant ($x+dx$, etc.); enfin l'équation du plan normal au troisième point ($x+2dx+d^2x$, etc.) résulte de la somme faite de l'équation (B), du double de l'équation (C), et de l'équation (D). Les trois équations (B), (C), (D) réunies appartiennent donc au point commun à ces trois plans, c'est-à-dire au point commun aux deux droites d'intersection du premier plan et du second, du second plan et du troisième, c'est-à-dire enfin au point de l'arête de rebroussement dont nous venons de parler. Si l'on élimine x, y, z des équations (B), (C), (D) au moyen des deux équations de la courbe à double courbure proposée, les deux équations restantes en α, β, γ appartiendront à cette arête de rebroussement.

248. Une courbe à double courbure quelconque et l'arête de rebroussement de la surface développable qui est le lieu des centres de ses sphères osculatrices, ont d'ailleurs une relation qu'il est utile de faire connaître. Remarquons 1° que deux tangentes consécutives à l'arête de rebroussement sont perpendiculaires aux deux plans osculateurs consécutifs correspondants de la courbe proposée; car ces tangentes ne sont autre chose que les intersections des plans normaux à cette courbe; 2° que deux plans osculateurs consécutifs de l'arête de rebroussement sont perpendiculaires aux deux

écutives correspondantes de l'arête proposée;
leux plans osculateurs ne sont autre chose
normaux à cette courbe. Donc, 1° ω dési-
dans le n° 238, l'angle de deux tangentes
l'une courbe proposée, il désignera égale-
les deux plans osculateurs consécutifs corres-
l'arête de rebroussement de la surface lieu
s sphères osculatrices; et 2° Ω désignant,
e n° 239, l'angle de deux plans osculateurs
la courbe, il désignera également l'angle des
consécutives correspondantes de cette arête
ent. Ces propositions ont été données par

de l'application des résultats précédents.

rons la courbe désignée sous le nom d'*hé-*
racée sur la surface d'un cylindre droit à
, de manière à couper toutes les arêtes
sous le même angle. Soit R le rayon du
nous supposerons que l'axe coïncide avec
représentons par a la tangente trigonomé-
e constant formé par chaque élément de la
plan des xy. Enfin désignons par t l'angle
plan des xz et le rayon du cylindre mené
élice, dont les coordonnées sont x, y, z.
courbe donne évidemment

$$\cos. t, \qquad y = R \sin. t, \qquad z = Rat;$$

pour les équations en x, y, z des projec-
sur les plans coordonnés

$$x^2+y^2=R^2, \quad z=Ra.\text{arc.cos.}\frac{x}{R}, \quad z=Ra.\text{arc.sin.}\frac{y}{R}.$$

Cela posé, si l'on veut déterminer en premier lieu la direction de la tangente menée à un point quelconque de la courbe, on aura, par les premières équations,

$$dx=-R\sin.t.dt, \quad dy=R\cos.t.dt, \quad dz=Ra.dt.$$

Donc

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\text{tang.}t}, \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{a}{\sin.t};$$

et substituant ces valeurs dans les formules du n° 223, il viendra

$$\cos.\alpha=-\frac{\sin.t}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \cos.6=\frac{\cos.t}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \cos.\gamma=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},$$

ou si l'on veut

$$\cos.\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{y}{R}, \quad \cos.6=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{x}{R}, \quad \cos.\gamma=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

D'après cela les équations de la tangente seront

$$z-z'=-\frac{a}{\sin.t}(x-x'), \quad z-z'=\frac{a}{\cos.t}(y-y'), \quad \frac{y-y'}{x-x'}=-\frac{1}{\text{tang.}t};$$

et celle du plan normal

$$\sin.t(x-x')-\cos.t(y-y')-a(z-z')=0.$$

x', y', z' désignent les coordonnées du point de tangence m; t est l'inclinaison sur l'axe des x du rayon Om qui répond

Tous les plans normaux forment le même angle
ın des xy.

second lieu, pour la détermination du plan oscu-
les rayons de courbure, on déduira des expres-
édentes

$$-R\sin.t.dt, \quad dy = R\cos.t.dt, \quad dz = Ra.dt,$$

t pour la variable indépendante,

$$\cdot R\cos.t.dt^2, \quad d^2y = -R\sin.t.dt^2, \quad d^2z = 0;$$
$$\sin.t.dt^3, \quad d^3y = -R\cos.t.dt^3, \quad d^3z = 0;$$

te

$$ds = \sqrt{1+a^2}.Rdt, \quad d^2s = 0.$$

$$-\frac{\sin.t}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\cos.t}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

ɔression du rayon de la première courbure ρ du
ıne ici

$$\rho = (1+a^2)R;$$

ɔressions de $\cos.\lambda$, $\cos.\mu$, $\cos.\nu$ du même nu-
ı déterminent la direction de ce rayon, donnent

$$= -\cos.t, \quad \cos.\mu = -\sin.t, \quad \cos.\nu = 0;$$

conclut que le rayon de la première courbure
nt à chaque point de la courbe est dirigé suivant
du cylindre mené à ce point. Ainsi, tous les
ɔ la première courbure sont placés sur une hélice
nême axe et le même pas que l'hélice proposée,
ɜst tracée sur un cylindre dont le rayon est a^2R.

L'équation du plan osculateur, n° 233, devient

$$a \sin.t(x-x') - a \cos.t(y-y') + z - z' = 0.$$

Tous les plans osculateurs forment le même angle avec le plan des xy.

Quant à l'expression du rayon P de la seconde courbure, la formule du n° 239 donne

$$P = \frac{1+a^2}{a} R, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{\rho}{a};$$

et si l'on se représente ce rayon comme dirigé suivant la perpendiculaire au plan osculateur, les cosinus des angles qu'il forme avec les axes des x, des y et des z sont respectivement

$$\frac{a \sin.t}{\sqrt{1+a^2}}, \quad -\frac{a \cos.t}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},$$

expressions qui indiquent une direction perpendiculaire à la fois à la tangente de la courbe déterminée par les angles α, β, γ, et au rayon de la première courbure déterminé par les angles λ, μ, ν.

Si l'on désignait par Ψ l'angle constant formé par la tangente de la courbe avec le plan des xy, on aurait tang. $\Psi = a$, et les expressions précédentes s'écriraient plus simplement

$$\cos.\alpha = -\cos.\Psi . \sin.t, \quad \cos.\beta = \cos.\Psi . \cos.t, \quad \cos.\gamma = \sin.\Psi.$$

$$\rho = \frac{R}{\cos.^2\Psi}, \qquad P = \frac{R}{\sin.\Psi . \cos.\Psi}.$$

251. Considérons maintenant la surface développable qui est le lieu des centres des sphères osculatrices de la courbe

cercle dont le rayon est $0m = R$ étant (*fig.* 43)
'hélice proposée (qui se projette en $m'n'$ sur
xz), le cercle dont le rayon $0\mu = a^2R$
e est tracée pour le cas où a est > 1) la base
eu des centres de la première courbure qui se
ι'ν' sur le plan des xz. $m\mu$ et $m'\mu'$ seront les
:ions du rayon de première courbure appar-
oint de l'hélice proposée dont les projections
Cela posé, la surface développable qui con-
tres des sphères osculatrices n'est autre chose
des intersections successives des plans nor-
élice proposée menés par tous les points de
. Et comme tous ces plans forment le même
e plan des xy, la surface qui est le lieu de leurs
successives est une *surface hélicoïde*, cette
n étant appliquée à toute surface décrite par
ent d'une ligne ou d'une autre surface dont
arcourt une hélice, tandis que les parties de
de la surface tournent autour de l'axe de cette
plus, les intersections successives dont il s'agit
un point placé dans l'hélice projetée en $\mu'\nu'$,
lieu des centres de la première courbure de
posée. Toutes forment le même angle avec le
, et elles sont toutes perpendiculaires au rayon
e sur lequel l'hélice projetée en $\mu'\nu'$ est tracée.
ont autre chose que les tangentes de cette
est le lieu de leurs intersections successives,
l'arête de rebroussement de la surface déve-
ιτ et $\mu'\tau'$ représentent sur la figure les projec-
ι tangente au point μ, μ'. Les points τ où ces
encontrent le plan des xy forment sur ce plan
e composée de deux branches $\tau\varepsilon$, $\sigma\varepsilon$ qui sont

des développantes du cercle dont 0μ est le rayon. On voit par ce qui précède que la surface développable lieu des centres des sphères osculatrices est partagée en deux nappes distinctes par l'hélice lieu des centres de la première courbure qui est son arête de rebroussement. Ces deux nappes ne pénètrent point dans le cylindre dont 0μ est le rayon, mais elles s'étendent à l'infini dans tous les sens au dehors de ce cylindre.

On peut démontrer ces propositions par le calcul, et en même temps trouver l'équation de la surface lieu des centres des sphères osculatrices d'après à ce qui a été expliqué à la fin du n° 242. Si dans les équations

$$dx(\alpha - x) + dy(\beta - y) + dz(\gamma - z) = 0,$$
$$ds^2 - d^2x(\alpha - x) - d^2y(\beta - y) - d^2z(\gamma - z) = 0,$$

qui appartiennent à l'intersection de deux plans normaux consécutifs d'une courbe à double courbure, on met pour x, y, z, et leurs différentielles, les valeurs précédentes en t, il viendra

$$\alpha \sin.t - \beta \cos.t = a(\gamma - Rat)$$
$$\alpha \cos.t + \beta \sin.t = -a^2R.$$

Ces deux dernières équations sont donc celles de la ligne d'intersection des deux plans normaux consécutifs menés au point de l'hélice proposée projeté en m, m', et au point suivant: il est facile, d'ailleurs, de vérifier que ce sont aussi celles de la tangente menée au point projeté en μ, μ' à l'hélice lieu des centres de la première courbure; la tangente dont je parle est donc la ligne d'intersection des deux plans normaux, conformément à ce qui a été dit ci-dessus. La seconde équation, qui ne contient que α et β, est l'équation de la projection de cette tangente sur le plan des xy, c'est-à-dire

, tangente $\mu\tau$, menée par le point μ au cercle
est 0μ ou a^2R.
ine t entre ces deux équations, le résultat con-
tes les lignes d'intersection qu'elles représen-
surface développable qui en est le lieu. Pour
: élimination, on ajoutera les équations après
es au carré, ce qui donnera

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^4R^2 + a^2(\gamma - Rat)^2,$$

ait

$$t = \frac{\gamma}{aR} \mp \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^4R^2} - 1};$$

cette valeur dans la seconde équation il viendra

$$\left.\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^4R^2} - 1\right) + \beta \sin. \left(\frac{\gamma}{aR} \mp \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^4R^2} - 1}\right) + a^2R = 0$$

on demandée de la surface développable.
ns que si l'on fait $\gamma = 0$ dans l'équation précé-
$= a^4R^2 + a^2(\gamma - Rat)^2$, le résultat, qui est

$$\alpha^2 + \beta^2 = (a^2R)^2 + (a^2R.t)^2,$$

aux points τ, où les intersections successives
ormaux qui répondent à chaque valeur de l'an-
i forment la surface développable, rencontrent
y. Or $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ représentant la distance 0τ, tan-
est représenté par 0μ, on conclut que la dis-
t être égale au développement de l'arc t dans le
le rayon est a^2R, ou que la courbe $\tau\sigma$ doit être
pante de ce cercle, comme on l'a dit plus haut.

252. Si l'on veut, enfin, connaître les développées de l'hélice, qui sont situées sur la surface développable dont il vient d'être question, on y parviendra de la manière suivante. Soit comme ci-dessus un point quelconque de l'hélice proposée projeté en m (*fig.* 44) sur le plan des xy, et en m' sur le plan des xz, et le centre de la première courbure de l'hélice correspondant à ce point, qui est projeté en μ, μ'. Considérons l'ensemble des plans normaux menés à l'hélice proposée, et supposons que l'on rabatte tous ces plans, en les faisant tourner autour de leurs intersections successives, sur le plan normal mené par le point m, m'. D'après ce qui a été dit n° 245 l'hélice proposée se réduira dans ce rabattement à un seul point m'', et comme toutes les distances $m\mu$ sont égales entre elles, l'hélice lieu des centres de la première courbure se rabattra sur une circonférence de cercle décrite du point m'' comme centre avec le rayon $m''\mu'' = m\mu$. Toutes les révolutions de cette dernière hélice se trouveront développées et rabattues les unes sur les autres, suivant leur véritable longueur, sur la circonférence de cercle dont il s'agit.

Cela posé, admettons que l'on veut déterminer la développée dont le premier point est projeté en μ, μ' et rapporté en μ'' sur le rabattement. Conformément à ce qu'on a vu n° 245, cette développée sera représentée sur le rabattement par la ligne droite $m''\mu''$ qu'il faut prolonger à l'infini dans les deux sens. Si l'on veut donc trouver un point quelconque de la développée dont il s'agit, on considérera que les arêtes rectilignes de la surface développable, c'est-à-dire les tangentes de l'hélice lieu des centres de courbure, sont représentées sur le rabattement par les tangentes au cercle dont le rayon est $m''\mu''$. Si donc on marque sur cette hélice le point correspondant au point e (c'est-à-dire le point qui est situé au-dessous du point μ, μ' à une distance mesurée sur

à l'arc $\mu''e$); si l'on mène en ce point une tan-
ce, et si l'on porte sur cette tangente la dis-
ura le point cherché de la développée.
truire d'abord de cette manière la partie de la
commençant au point μ, μ' qui se trouve placée
supérieure de la surface développable, on tra-
es tangentes de la partie de l'hélice projetée en
abattue en $\mu''l''$. Or, la tangente menée au point l''
ement ne rencontre plus la ligne $m''\mu''$ prolongée.
point l, l' de l'hélice est situé à une distance du
mesurée sur cette hélice égale à la longueur du
rconférence $\mu''el''$, on est assuré que la portion de
t il s'agit, projetée en μa, $\mu'a'$, devient à une dis-
ie parallèle à la tangente de l'hélice menée au
Elle a donc pour asymptote la ligne LA, L'A' me-
èlement à cette tangente par le point L, L' de l'hé-
sée qui est diamétralement opposée au point l, l'.
L, L' termine l'arc mL, m'L' de l'hélice proposée
être décrit par le développement de la portion de
a, $\mu'a'$.
veut en second lieu construire la partie de la déve-
commençant au point μ, μ' qui se trouve placée sur
inférieure de la surface développée, on emploiera
entes de la partie de l'hélice projetée en μn, $\mu'n'$ et
en $\mu''n''$, en portant sur chaque tangente la lon-
h en contre-bas du point de tangence. On obtiendra
manière la portion de courbe μb, $\mu'b'$. Et comme la
e menée sur le rabattement au point n'' ne rencontre
ligne $m''\mu''$ prolongée, il s'ensuit qu'ayant marqué sur
le point n, n' qui est situé à une distance du point μ
à la longueur du quart de circonférence $\mu''gn''$, la
μb, μ, b' tend à devenir à l'infini parallèle à la tan-

gente de l'hélice menée au point n, n'. Cette courbe aura donc pour asymptote une parallèle NB, N'B' à cette tangente menée par le point N, N' de l'hélice proposée, qui est diamétralement opposé au point n, n'. Le point N, N' termine l'arc mN, m'N' de l'hélice proposée qui peut être décrit par le développement de la portion de courbe μb, $\mu' b'$.

Les deux portions de courbe μa, $\mu' a'$ et μb, $\mu' b'$ forment deux branches distinctes de la développée, réunies au point μ, μ' qui est un point de rebroussement.

Pour continuer à tracer cette courbe, et trouver la branche dont le développement pourrait décrire l'arc de l'hélice proposée qui est au-dessus du point N,N' il faudra construire les tangentes à la portion np, $n'p'$ de l'hélice lieu des centres de courbure qui est rabattue en $n''ip''$, puis porter de bas en haut sur ces tangentes, à partir du point de tangence, les longueurs ik. Or, il est visible que si l'arc d'hélice np, $n'p'$ est égal en longueur au quart de circonférence $n''ip''$, cette opération donnera la portion de courbe pc, $p'c'$, parfaitement égale aux précédentes, ayant pour asymptote le prolongement NC, N'C' de la ligne NB, N'B'.

La même construction donnera ensuite par les tangentes de la portion pq, $p'q'$ de l'hélice lieu des centres de courbure, qui est rabattue sur le quart de cercle $p''q''$, la portion de courbe pd, $p'd'$ qui est réunie en p, p' à la précédente par un point de rebroussement. Et ainsi de suite.

On voit par ce qui précède que la développée de l'hélice proposée est formée d'une infinité de branches parfaitement égales entre elles, placées alternativement sur les nappes supérieure et inférieure de la surface développable qui est le lieu des centres des sphères osculatrices. Chaque branche est réunie à la précédente par un point de rebroussement, et à la suivante par un asymptote qui leur est commune. Les points

ıt sont placés sur l'hélice lieu des centres de intervalles égaux à la longueur du demi-cercle st égal au rayon de courbure $(1 + a^2)R$.
›pliquer à l'hélice les notions présentées dans marquera qu'à l'égard de cette courbe les trois (C), (D) de ce numéro deviennent respective-n y remplace x, y, z et leurs différentielles par :n t,

$$\alpha \sin.t - 6\cos.t = a(\gamma - Rat)$$
$$\alpha \cos.t + 6\sin.t = -a^2R$$
$$\alpha \sin.t - 6\cos.t = 0.$$

s, qui donnent

$$^2R\cos.t,\quad 6 = -a^2R\sin.t,\qquad \text{et}\qquad \gamma = Rat,$$

t évidemment une hélice tracée sur un cylindre de dont le pas est égal au pas de l'hélice proposée, et ée dans une position opposée à cette dernière. Ces ıppartiennent à la courbe qui est le lieu des centres ıière courbure de l'hélice proposée, comme on l'a .s le n° 250; et l'on a vu effectivement dans le n° 251 courbe était l'arête de rebroussement de la surface entres de la première courbure.
ɛs sphères dont le rayon mesure la première cour-.a courbe proposée, et qui n'ont en général qu'un lu second ordre avec cette courbe, ont dans le cas ɛr de l'hélice un contact du troisième ordre.
à la proposition du n° 248 on remarquera que $\Omega = \frac{ds}{P}$; et que d'après les valeurs de ds, ρ et P don-250, on a par conséquent pour l'hélice proposée

$$\omega = \frac{dt}{\sqrt{1+a^2}}, \qquad \Omega = \frac{adt}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Or l'arête de rebroussement de la surface lieu des centres des sphères osculatrices est ici une seconde hélice dont le rayon est a^2R et dont le pas est égal à celui de l'hélice proposée; d'où il suit qu'en appelant a' la valeur de a qui conviendrait à cette seconde hélice, on doit avoir $a' = \frac{1}{a}$. Mais si l'on écrit $\frac{1}{a}$ à la place de a dans les expressions précédentes, elles deviennent respectivement

$$\omega = \frac{adt}{\sqrt{1+a^2}}, \qquad \Omega = \frac{dt}{\sqrt{1+a^2}},$$

en sorte que la valeur de l'angle ω appartenant à la courbe ne diffère pas de la valeur de l'angle Ω appartenant à l'arête de rebroussement, et réciproquement la valeur de l'angle Ω qui appartient à la courbe ne diffère pas de la valeur de l'angle ω qui appartient à l'arête de rebroussement; ce qui est conforme aux propositions énoncées.

XXIII. INTÉGRATION DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES LES PLUS SIMPLES D'UNE SEULE VARIABLE.

254. Une fonction différentielle du premier ordre d'une seule variable x est représentée en général par

$$Xdx,$$

X désignant une fonction quelconque de x. Cette fonction différentielle est toujours le résultat de l'opération de la différentiation appliquée à une certaine fonction y de la variable x, en

$ly = Xdx$ et $\frac{dy}{dx} = X$;

›n peut toujours la regarder comme le résultat
ɛration. L'opération désignée sous le nom d'*in-*
iste à trouver la fonction y lorsque la différen-
donnée, ou en général à trouver une fonction
ıt différentiée, donne pour sa différentielle Xdx.
ı y de la variable x qui, étant différentiée, donne
la différentielle proposée Xdx, est nommée l'*in-*
tte différentielle. De plus on désigne l'intégrale
›n différentielle Xdx par le signe $\int$ placé au-
dx. Ainsi, l'équation précédente

$$dy = Xdx$$

, elle entraîne la suivante :

$$y = \int Xdx,$$

ıuement. Mais il importe de remarquer que si
trouvé une fonction de x, qui, étant différen-
ıât pour résultat Xdx, on pourrait ajouter à cette
ıne constante quelconque C, sans qu'elle cessât
r Xdx par sa différentiation. Si donc la fonction
it de trouver ne nous est connue que par cette
ıdition qu'en la différentiant l'on doit trouver pour
Xdx, nous devons, pour en former l'expression
, comprendre dans cette expression le terme con-
arbitraire C. D'après cela, y représentant l'*intégrale*
›nction différentielle proposée Xdx, nous écrirons
›ment

$$y = C + \int X dx.$$

Dans cette équation $\int X dx$ représente le résultat immédiat de l'*intégration*, c'est-à-dire la fonction de x qui, étant différentiée, donnera $X dx$ pour sa différentielle. C est la *constante arbitraire* qui doit être ajoutée à cette fonction pour donner à l'expression de l'intégrale y la généralité nécessaire. Au moyen de l'addition de cette constante on est assuré que y comprend toutes les expressions analytiques formées de la variable x qui, étant différentiées, donnent $X dx$ pour leur différentielle commune; car on ne pourrait ajouter à $\int X dx$ qu'une quantité dont la fonction dérivée fût nulle, c'est-à-dire une constante.

Tant que l'intégrale y n'est définie que par cette seule condition d'avoir $X dx$ pour différentielle, la constante C demeure entièrement arbitraire. Mais dans toutes les questions qui dépendent du calcul intégral, il existe toujours des conditions d'après lesquelles on peut fixer la valeur de cette constante et parvenir à un résultat déterminé.

255. Ce n'est pas sans raison que l'on a affecté l'expression $X dx$ de l'initiale du mot *somme* pour exprimer la fonction dont la différentielle est $X dx$. En effet une fonction quelconque peut toujours être regardée comme la somme d'un nombre infini de valeurs de sa différentielle. Pour le montrer clairement, nous reprendrons la considération, déjà employée dans d'autres occasions, des valeurs successives

$$x_0, x_0 + \Delta x, x_0 + 2\Delta x, x_0 + 3\Delta x, \ldots\ldots x_0 + (n-1)\Delta x, x_0 + n\Delta x,$$

attribuées à la variable indépendante x, Δx étant regardée comme une différence constante, et des valeurs correspondantes

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{n-1}, y_n$$

r une fonction y de cette variable. Les diffé-
eux valeurs consécutives de y étant exprimées
$_1$, Δy_2, Δy_{n-1}, nous avons évidemment (pourvu
$x = 0$ jusqu'à $x = x_n$ la fonction y ne prenne
irs infinies)

$$: y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots\ldots\ldots + \Delta y_{n-1}$$

qui peut s'écrire

$$+ \left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_3}{\Delta x} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

ons maintenant que la différence Δx diminue de
lus en s'approchant de zéro, et que le nombre n
dans le même rapport, en sorte que $n\Delta x$ ne
oint. Le nombre des termes compris dans la paren-
mentera de plus en plus, et la valeur de l'un quel-
$\frac{\Delta y_i}{\Delta x}$ de ces termes tiendra à se confondre avec la
u coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ qui répond à la valeur
r de la variable x. D'où l'on voit qu'à mesure que Δx
la quantité

$$\left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_3}{\Delta x} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x}\right)\Delta x$$

che d'une limite qui est la somme des valeurs en
e infini que prend la différentielle $\frac{dy}{dx}dx$ de la fonc-
roposée, lorsqu'on fait croître la variable indépendante x
ntervalle constant et infiniment petit dx, depuis $x = x_0$
'à $x = x_0 + n\Delta x$. On en conclut que l'on passe de

la valeur quelconque y_0 de la fonction à une autre valeur quelconque y, en ajoutant à y_0 la somme des valeurs que prend la différentielle $\frac{dy}{dx}\,dx$ dans l'intervalle compris entre les valeurs x_0 et x qui répondent à y_0 et y.

Si nous représentons donc comme ci-dessus par Xdx la différentielle de la fonction y, c'est-à-dire $\frac{dy}{dx}\,dx$, nous pourrons écrire à la place de l'équation précédente

$$y = y_0 + \int_{x_0} Xdx,$$

Le signe $\int_{x_0}$ indique que l'on a fait la somme des valeurs de la différentielle Xdx qui répondent à toutes les valeurs x_0, $x_0 + dx$, $x_0 + 2dx$, $x_0 + 3dx$, etc., jusqu'à la valeur $x_0 + (n-1)\,dx$ qui précède la valeur x correspondante à la valeur y de la fonction qui est dans le premier membre. En écrivant x_0 au bas du signe d'intégration $\int$, on spécifie la valeur particulière de x correspondante à y_0 à partir de laquelle la somme est prise.

L'équation précédente subsiste d'ailleurs quelles que soient les valeurs correspondantes x_0 et y_0; et si l'on avait simplement donné une différentielle Xdx sans spécifier à partir de quelle valeur x_0 de la variable indépendante on voulait sommer les valeurs de cette différentielle, ni quelle était la valeur correspondante y_0 de la fonction, il n'existerait aucun moyen de les déterminer. Donc en considérant dans l'équation précédente la fonction y comme étant assujettie à cette seule condition d'avoir Xdx pour différentielle, il faut y regarder x_0 comme arbitraire aussi bien que y_0. Il est donc inutile de marquer la valeur indéterminée de x à partir de laquelle la somme $\int Xdx$ est prise, et l'on peut écrire comme

précédent

$$y = C + \int X dx.$$

ermination de la valeur de l'intégrale y, et la ompléter l'expression par l'addition d'une con- e, paraîtront bien évidentes si l'on considère x se d'une courbe plane dont y représente l'or- t, lorsque la fonction y est donnée explicitement nt en x, la figure et la position de la courbe nt déterminées. Mais il n'en est pas de même e seulement la différentielle $dy = X dx$, ou le érentiel $\frac{dy}{dx} = X$ de la fonction dont il s'agit. e ce coefficient différentiel détermine simple- on de la tangente de la courbe qui a lieu pour correspondant à une valeur donnée de x. Si 'une courbe mm ait été tracée de manière à sa- condition $\frac{dy}{dx} = X$, et qu'ensuite on la déplace rire à tous ses points des parallèles à l'axe sera encore à cette même condition dans toutes m, mm qu'elle occupera; et il n'y aura aucune hoisir une de ces positions plutôt que toute

it, d'ailleurs, que l'ordonnée de la courbe doit par une fonction de x qui ait pour coefficient dif- ns représentons par $\int X dx$ une telle fonction. Mais it à cette seule fonction en écrivant simplement choisirait entre les courbes dont il s'agit, puis- ur déterminée de x correspondrait alors une inée de y. Si l'on veut donc (comme il est né-

cessaire de le faire) conserver à l'intégrale une aussi grande généralité et un sens aussi étendu qu'à la différentielle proposée, on écrira

$$y = C + \int X dx,$$

C désignant une quantité constante arbitraire. De cette manière l'expression de y peut représenter l'ordonnée de toutes les courbes en nombre infini dont la direction de la tangente est déterminée dans un point quelconque par l'expression $\frac{dy}{dx} = X$ du coefficient différentiel du premier ordre.

257. Remarquons enfin que, pour faire cesser toute indétermination sur la courbe dont la fonction y doit représenter l'ordonnée, il suffirait de se donner un point quelconque par lequel cette courbe devrait passer. Il est facile de se rendre compte, en effet, que la connaissance d'un seul point d'une courbe, et de la direction de la tangente correspondante à une valeur quelconque de l'abscisse, suffit pour tracer cette courbe dans toute son étendue. Mais se donner un point d'une courbe, c'est dire qu'à une certaine valeur x_0 de x correspond une certaine valeur y_0 de y. Or, si l'on fait une telle supposition, la constante arbitraire C de l'équation

$$y = C + \int X dx$$

se trouvera déterminée; car soit P la fonction de x, représentée par $\int X dx$, et désignons par P_0 la valeur que prend P quand $x = x_0$. On devra donc avoir

$$y_0 = C + P_0,$$

équation qui détermine la valeur de C.

En général, la constante arbitraire est déterminée lorsque,

fférentielle Xdx dont on demande l'intégrale y,
une certaine valeur donnée a de x doit ré-
ɔur également donnée b pour y.

ıre de l'opération désignée par le nom d'inté-
pliquée par ce qui précède, il reste à indiquer
l'analyse fournit pour effectuer cette opéra-
e pour trouver la fonction finie de la variable x
rentiée, donnera une différentielle quelconque
ou, si l'on veut, pour trouver la fonction primi-
fonction donnée X est la fonction dérivée ou le
érentiel du premier ordre. Mais nous devons
que, tandis que l'opération qui consiste à dé-
ɔnction donnée y sa différentielle dy s'effectue
lé régulier conduisant toujours au résultat de-
ation inverse qui consiste à revenir de la diffé-
onction primitive, ne peut au contraire s'effec-
des cas particuliers, et en quelque sorte par
ı général, on n'est pas assuré de pouvoir assi-
ıes finis la fonction primitive de x correspon-
différentielle donnée Xdx; en sorte que l'on
bligé, comme on le verra par la suite, de sup-
procédés d'approximation au manque de l'ex-
de cette fonction primitive. Il importe, d'ailleurs,
les principaux cas dans lesquels l'intégration
ctuée, et les méthodes dont cette opération exige

t évident, en premier lieu, que l'on obtient im-
t l'intégrale d'une différentielle proposée lorsque
ntielle est reconnue pour appartenir aux fonctions
t il a été question ci-dessus dans les art. II et III.
, on voit sur-le-champ qu'en supposant

$dy = x^m dx$,	on aura	$y = C + \frac{x^{m+1}}{m+1}$
$\frac{dx}{x}$		$C + lx$
$e^x dx$		$C + e^x$
$a^x dx$		$C + \frac{a^x}{la}$
$\sin.x \,.\, dx$		$C - \cos.x$
$\cos.x \,.\, dx$		$C + \sin.x$
$\frac{dx}{\cos.^2 x}$		$C + \text{tang}.x$
$\frac{dx}{\sin.^2 x}$		$C - \cot.x$
$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$		$C + \text{arc. sin}.x$
$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$		$C + \text{arc. cos}.x$
$\frac{dx}{1+x^2}$		$C + \text{arc. tang}.x$
$-\frac{dx}{1+x^2}$		$C + \text{arc. cot}.x$

(La formule $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ subsiste en général pour toutes les valeurs positives ou négatives, entières ou fractionnaires, et même irrationnelles, de l'exposant m. On peut distinguer les cas particulier suivants :

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x},$$

qui se présentent fréquemment. Il faut toutefois excepter le seul cas où l'on aurait $m = -1$, et où la formule générale donnerait $\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0}$. Ne concluons pas, d'ailleurs, de ce ré-

yse indique ici une valeur infinie pour l'inté-
:tion différentielle $\frac{dx}{x}$, ce qui serait absurde.
:marquer, en effet, que l'intégrale doit être
ıne constante arbitraire. Or, comme rien n'em-
›ser à cette constante une valeur infinie né-
eulement conclure que l'expression générale
ıe un résultat indéterminé quand $m = -1$.
e expression sous la forme $\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$, a dé-
ıstante (ce qui est permis), et la considérant
ction de m qui devient $\frac{0}{0}$ lorsque l'on attribue
-1, on pourra en trouver la véritable valeur
es règles données dans les numéros 94 et sui-
ırt des coefficients différentiels des deux termes
›ris relativement à m est $\frac{lx.x^{m+1} - la.a^{m+1}}{1}$, et
nt $m = -1$, $lx - la$ pour l'expression de la
ıée. On sait effectivement, par le calcul diffé-
$lx = \frac{dx}{x}$, d'où résulte $\int \frac{dx}{x} = lx$, expression
doit ajouter une constante arbitraire. La va-
ıuée à l'exposant m entraînant un changement
: de la fonction par laquelle l'intégrale est re-
ction qui alors n'est plus comprise dans l'ex-
rale $C + \frac{x^{m+1}}{m+1}$, on est averti de cette cir-
la valeur indéterminée que prend alors cette

260. A l'égard des fonctions différentielles plus composées, on ne parvient à les intégrer qu'en employant divers procédés dont l'objet est toujours ou de décomposer la fonction proposée en d'autres fonctions différentielles plus simples qui rentrent dans quelques-unes des précédentes; ou d'en changer la forme par la substitution d'une autre variable à la variable x, afin de la faire rentrer également dans les différentielles dont les fonctions primitives sont immédiatement connues; ou enfin de faire dépendre la recherche de l'intégrale demandée de la connaissance d'une autre intégrale qu'il est plus facile d'obtenir.

Tel est l'objet du procédé connu sous le nom d'intégration par parties, qui est des plus généraux dont on fasse usage dans le calcul intégral. Remarquons que

$$d.uv = udv + vdu:$$

donc réciproquement

$$uv = \int udv + \int vdu;$$

d'où l'on tire

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Ainsi, ayant mis une différentielle quelconque proposée sous la forme udv, c'est-à-dire sous la forme du produit d'une fonction finie u de la variable x, par la fonction différentielle dv de cette même variable (dont nous supposons que l'on connaisse l'intégrale v), la recherche de l'intégrale $\int udv$ est ramenée à connaître l'intégrale $\int vdu$. Il est superflu d'ajouter que l'expression de l'intégrale demandée doit toujours être complétée par une constante arbitraire, que nous avons omis d'écrire dans l'équation précédente.

261. Pour faire concevoir par un exemple l'utilité du procédé

n par parties, soit la différentielle proposée
x. Nous considérons les deux facteurs x et
le dernier a pour intégrale sin. x. Ainsi, con-
a formule générale précédente, nous écrirons

$$x \cos.x\,dx = x.\sin.x - \int \sin.x\,dx$$
$$= x.\sin.x + \cos.x$$

ınt l'intégrale par une constante arbitraire nous

$$y = C + x.\sin.x + \cos.x$$

ınt l'exactitude peut être vérifiée par la diffé-
outons que le succès de l'opération dépend en
oix des facteurs dans lesquels on décompose la
roposée. Si dans la différentielle précédente

$$x \cos.x\,dx,$$

rions les deux facteurs cos.x et $x\,dx$, dont le
ır intégrale $\frac{x^2}{2}$, nous devrions écrire

$$\text{os}.x.x\,dx = \frac{x^2\cos.x}{2} - \int \frac{x^2}{2}(-\sin.x\,dx)$$
$$= \frac{x^2\cos.x}{2} + \int \frac{x^2\sin.x\,dx}{2},$$

la recherche de l'intégrale demandée se trouverait
la recherche d'une autre intégrale plus compli-
t toujours décomposer (s'il est possible) la différen-
ée de manière que l'intégration d'un des facteurs
tiation de l'autre la ramène à une expression plus
l'intégrale se présente immédiatement.
ération de l'intégration des fonctions différen-

tielles peut d'ailleurs être facilitée par les remarques suivantes :

1° Lorsqu'une différentielle est affectée d'un facteur constant, ce facteur affecte également l'intégrale;

$$dy = aXdx \qquad \text{donne} \qquad y = C + a\int Xdx.$$

2° Lorsque la fonction proposée présente la somme de plusieurs différentielles, l'intégrale demandée est également la somme des intégrales de ces différentielles considérées chacune à part;

$$dy = Xdx + X_1dx - X_2dx$$

donne

$$y = C + \int Xdx + \int X_1dx - \int X_2dx.$$

3° Lorsqu'une différentielle est de la forme ou peut être mise sous la forme

$$f(X).dX,$$

X désignant toujours une fonction quelconque de la variable x, on peut alors la traiter comme si X était une variable indépendante; en sorte que si F (x) représente la fonction de x dont la différentielle est $f(x).dx$, c'est-à-dire si l'on a

$$F(x) = \int f(x).dx,$$

on a également

$$F(X) = \int f(X).dX.$$

Soit proposée, par exemple, la différentielle

$$dy = x^{m-1}.\sin.(a + bx^m)dx.$$

et divisant par mb on peut écrire

$$dy = \frac{1}{mb}.\sin.(a + bx^m).mbx^{m-1}dx,$$

est la différentielle de la fonction $a + bx^m$ qui
le signe sinus. En posant donc $X = a + bx^m$,

$$dy = \frac{1}{mb}\sin.X.dX,$$

e est

$$C - \frac{1}{mb}\cos.X = C - \frac{1}{mb}\cos.(a + bx^m),$$

vérifiera en appliquant les règles de la diffé-

ÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES ENTIÈRES
ET FRACTIONNAIRES.

end par fonction rationnelle entière de la va-
fonction formée de termes où il n'entre que
es de cette variable dont l'exposant est un
r. Telle est la fonction différentielle

$$y = (a + bx^m + cx^n + dx^p + \text{etc.})dx,$$

$a, b, c, \ldots\ldots$ sont des constantes quelconques
$\ldots$ sont des nombres entiers positifs ou né-
lle fonction peut toujours être intégrée, et son
évidemment, d'après ce qu'on a vu dans l'ar-
it,

$$y = C + ax + \frac{bx^{m+1}}{m+1} + \frac{cx^{n+1}}{n+1} + \frac{dx^{p+1}}{p+1} + \text{etc.},$$

C désignant la constante arbitraire. Il faut remarquer seulement que si l'exposant de x dans l'un des termes était -1, en sorte que ce terme fût $\frac{h}{x}dx$, son intégrale serait $h.lx$.

De plus, la différentielle précédente s'intégrerait encore de la même manière si les exposants m, n, p.... avaient des valeurs quelconques non entières.

264. Si l'on donnait la fonction différentielle sous la forme

$$dy = (a + bx^m + cx^n + \text{etc.})^r dx,$$

r étant un nombre entier, on la ferait rentrer dans la précédente en développant par la multiplication la puissance indiquée.

Mais si l'on avait simplement

$$dy = (a + bx)^r dx,$$

qui peut s'écrire

$$dy = \frac{1}{b}(a + bx)^r b dx,$$

on remarquerait que bdx étant la différentielle de $a + bx$, la fonction proposée se trouve dans le cas dont il a été question dans le n° 262, en sorte que l'on a immédiatement en posant $a + bx = X$,

$$dy = \frac{1}{b} X^r dX,$$

d'où (quel que soit le nombre r, sauf le cas où il serait -1)

$$y = C + \frac{1}{b}\frac{X^{r+1}}{r+1} = C + \frac{(a+bx)^{r+1}}{b(r+1)}.$$

l'on avait

$$dy = (a + bx^m)^r x^{m-1} dx,$$

par une remarque semblable

$$y = C + \frac{(a+bx^m)^{r+1}}{bm(r+1)}.$$

dérons maintenant les fonctions fractionnaires lont la forme générale est

$$= \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots\ldots + f}{x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots\ldots + t} dx,$$

t $p, q, \ldots\ldots t$ désignant des coefficients constants ; m et n des nombres entiers. Nous remarque- nier lieu que si l'exposant m dans le numéra- ait l'exposant n dans le dénominateur, on pour- simple division algébrique, changer la fraction dx en une fonction entière à laquelle se trou- e une nouvelle fraction dans laquelle le plus ant de x dans le numérateur serait plus petit, au moins, que le plus grand exposant dans le ir. L'intégration de la fonction entière s'effec- rès ce qui a été dit dans le n° 263. Ainsi, l'in- la différentielle proposée se ramène toujours au osant m est au plus égal à $n-1$.

, soit en général

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

une fraction rationnelle, $F(x)$ désignant un polynome en x du degré n, de la forme $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots\ldots + t$; et $f(x)$ un autre polynome en x du degré $n-1$ au plus. Supposons qu'ayant écrit l'équation

$$F(x) = 0,$$

cette équation ait été résolue par les méthodes connues, et qu'on en ait déterminé en nombres toutes les racines réelles et imaginaires. Désignons par a, a_1, a_2, etc. les racines réelles par $\alpha \pm 6\sqrt{-1}$, $\alpha_1 \pm 6_1\sqrt{-1}$, $\alpha_2 \pm 6_2\sqrt{-1}$, etc. les racines imaginaires; et par conséquent par $x-a$, $x-a_1$, $x-a_2$, etc., les facteurs simples correspondants à chaque racine réelle; et par $(x-\alpha)^2 + 6^2$, $(x-\alpha_1)^2 + 6_1^2$, $(x-\alpha_2)^2 + 6_2^2$, etc., les facteurs du second degré correspondants à chaque couple de racines imaginaires. Supposons en premier lieu qu'il n'y ait pas de racines égales entre elles. On sait par la théorie des équations que le polynome $F(x)$ est égal au produit des facteurs simples ou doubles correspondants aux racines de l'équation $F(x)=0$; et nous remarquons que l'on peut toujours poser

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \text{etc.},$$
$$+ \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+6^2} + \frac{M_1x+N_1}{(x-\alpha_1)^2+6_1^2} + \frac{M_2x+N_2}{(x-\alpha_2)^2+6_2^2} + \text{etc.},$$

A, A_1, A_2, etc.; M, M_1, M_2, etc.; et N, N_1, N_2, etc., désignant des constantes; puisqu'en réduisant les fractions du second membre au même dénominateur, le dénominateur commun sera $F(x)$, et le numérateur un polynome en x du degré $n-1$ que l'on rendra identique avec le polynome $f(x)$, en posant $n-1$ équations du premier degré,

utant d'équations qu'il existe de constantes in-
La fraction proposée $\frac{f(x)}{F(x)}$ se trouvera décom-
te manière en fractions partielles de la forme
$\frac{Ix+N}{-\alpha)^2+\beta^2}$. Quant à la détermination des con-
orment les numérateurs des fractions partielles,
fectuer très-simplement de la manière suivante.
sons-nous de déterminer le numérateur A de
action simple $\frac{A}{x-a}$, et posons pour abréger

$$F(x)=(x-a).\varphi(x)$$

par $\varphi(x)$ le produit de tous les facteurs du
x) à l'exception de $x-a$. Nous pouvons écrire
uation précédente

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{\varpi(x)}{\varphi(x)},$$

nt une fonction entière de x, et si nous multi-
x membres par $F(x)$, il viendra

$$f(x)=A\frac{F(x)}{x-a}+\frac{\varpi(x).F(x)}{\varphi(x)}.$$

upposait $x=a$, la fraction multipliée par A
, et donnerait pour sa véritable valeur, d'après
numéros 94 et suivants, $F'(a)$, tandis que le
se réduirait à zéro. Donc

$$=A.F'(a), \qquad \text{d'où} \qquad A=\frac{f(a)}{F'(a)},$$

en désignant par $F'(a)$ la valeur que prend le coefficient différentiel du premier ordre de la fonction $F(x)$ lorsqu'on y suppose $x = a$. Il est visible que les numérateurs des fractions simples suivantes se détermineront de la même manière, et qu'on aura également

$$A_1 = \frac{f(a_1)}{F'(a_1)}, \qquad A_2 = \frac{f(a_2)}{F'(a_2)}, \text{ etc.}$$

Il n'est point à craindre d'ailleurs que les valeurs de $F'(a)$, $F'(a_1)$, $F'(a_2)$, etc., se réduisent à zéro : cela ne pourrait arriver qu'autant qu'il y aurait au moins deux racines égales à a, a_1, a_2, etc., ce qui est contre la supposition.

267. Les numérateurs des fractions simples correspondantes aux racines imaginaires peuvent être déterminés d'une manière semblable. Soit la fraction

$$\frac{Mx + N}{(x - \alpha)^2 + \beta^2};$$

on peut la mettre sous la forme

$$\frac{P - Q\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}} + \frac{P + Q\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}} = \frac{2P(x - \alpha) + 2Q\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2},$$

et l'on a $M = 2P$, $N = -2P\alpha + 2Q\beta$. En employant le même raisonnement qui vient d'être présenté, on conclura donc que les quantités P, Q doivent satisfaire à l'équation

$$P - Q\sqrt{-1} = \frac{f(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})},$$

qui se partage en deux équations distinctes lorsqu'on égale

s termes réels et ceux qui sont affectés du ra-
ire $\sqrt{-1}$, et qui suffit par conséquent pour dé-
deux quantités dont il s'agit. On aura de la
e

$$= \frac{f(\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1})}{F'(\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1})}, \quad P_2-Q_2\sqrt{-1}=\frac{f(\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1})}{F'(\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1})}$$

$$=-2P_1\alpha_1+2Q_1\beta_1\,;\ M_2=2P_2,\ N_2=-2P_2\alpha_2+2Q_2\beta_2\,;$$

ite.

n suppose en second lieu que l'équation $F(x)=0$
e n° 265 a plusieurs racines égales à la racine
la décomposition de la fraction proposée $\frac{f(x)}{F(x)}$
er de la manière suivante.

$$+\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-2}}+\ldots\ldots+\frac{A_{k-1}}{x-a}+\frac{\varpi(x)}{\varphi(x)}$$

par k le nombre des racines égales dont il
, A_1, A_2,....A_{k-1} des constantes indéterminées;
roduit de tous les facteurs du dénominateur $F(x)$
du facteur $(x-a)^k$, en sorte que l'on a $F(x)=$
; enfin par $\varpi(x)$ un polynome entier en x dont
nférieur à la plus haute puissance de x contenue
l est visible qu'en réduisant toutes les fractions
embre au même dénominateur, qui sera $F(x)$,
ndre les deux membres identiques en disposant

des constantes A, A_1, A_2,.... A_{k-1}. Pour déterminer les valeurs de ces constantes, nous remarquons qu'après la réduction au même dénominateur dont on vient de parler, l'équation précédente devient simplement

$$f(x) = A.\varphi(x) + A_1(x-a).\varphi(x) + A_2(x-a)^2.\varphi(x) + \ldots\ldots$$
$$+ A_{k-1}(x-a)^{k-1}.\varphi(x) + (x-a)^k.\varphi(x).$$

Or en la différentiant une, deux, trois fois, etc., puis faisant après les différentiations $x = a$, cette équation donnera les suivantes,

$$f(a) = A.\varphi(a)$$
$$f'(a) = A.\varphi'(a) + A_1.\varphi(a)$$
$$f''(a) = A.\varphi''(a) + A_1.2\varphi'(a) + A_2.2\varphi(a)$$
$$f'''(a) = A.\varphi'''(a) + A_1.3\varphi''(a) + A_2.6\varphi'(a) + A_3.6\varphi(a)$$
$$f^{\text{iv}}(a) = A.\varphi^{\text{iv}}(a) + A_1.4\varphi'''(a) + A_2.12\varphi''(a) + A_3.24\varphi'(a) + A_4.24\varphi(a)$$
etc.

au moyen desquelles les valeurs de A, A_1, A_2,...., A_{k-1} pourront être calculées successivement. Ces valeurs dépendront, comme on le voit, des fonctions dérivées successives de la fonction $\varphi(x)$, qui est connue, puisqu'elle est le quotient de la division du dénominateur $F(x)$ par $(x-a)^k$. Mais si l'on ne veut point calculer cette fonction, on remarquera qu'en prenant dans l'équation

$$F(x) = (x-a)^k.\varphi(x),$$

les coefficients différentiels ou fonctions dérivées des divers ordres de chaque membre on trouvera généralement pour l'expression de la fonction dérivée d'un ordre quelconque désigné par i,

$$-1)(k-2)\ldots.(k-i+1)(x-d)^{k-i}\ .\varphi\ (x)$$
$$-1)(k-2)\ldots.(k-i+2)(x-a)^{k-i+1}.\varphi'(x)$$
$$\frac{1)}{}.k(k-1)(k-2)\ldots.(k-i+3)(x-a)^{k-i+2}.\varphi''(x)$$
$$\frac{1)(i-2)}{2.3}.k(k-k)(k-2)\ldots.(k-i+4)(x-a)^{k-i+3}.\varphi'''(x)$$

. . . . . .

. . . . . .

$$-a)^k.\varphi^{(i)}(x),$$

it facilement qu'en faisant $x=a$ dans les ivées des ordres k, $k+1$, $k+2$, etc., il

$$k(k-1)(k-2)\ldots\ldots.2.1\varphi(a),$$
$$(k+1).k(k-1)(k-2)\ldots\ldots.2.1\varphi'(a),$$
$$\frac{(k+2)(k+1)}{2}.k(k-1)(k-2)\ldots\ldots.2.1\varphi''(a),$$
$$\frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{2.3}.k(k-1)(k-2)\ldots\ldots.2.1\varphi'''(a),$$

. . . . . .

lesquelles les quantités $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, etc., éterminées au moyen des valeurs que prennent dérivées des ordres k, $k+1$, $k+2$, etc., du r $F(x)$ lorsqu'on y fait $x=a$.

existait dans l'équation $F(x)=0$ d'autres ra- égales entre elles, par exemple k racines on concevrait de même que la présence du $-a_1)^k$ dans le polynôme $F(x)$ donnerait lieu omposition de la fraction proposée $\frac{f(x)}{F(x)}$, à la fractions simples.

$$^k + \frac{A_1}{(x-a_1)^{k-1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{k-2}} + \ldots\ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a_1},$$

et l'on emploierait pour le calcul des constantes A, A_1, A_2.... A_{k-1} les formules données ci-dessus, dans lesquelles il faudrait regarder $\varphi(x)$ comme représentant le quotient de la division de $F(x)$ par le facteur $(x-a_1)^k$. Il en serait de même s'il se trouvait un plus grand nombre de racines multiples.

270. Ces procédés s'étendront d'ailleurs facilement au cas où il y aurait des racines imaginaires multiples dans l'équation $F(x)=0$. Si l'on représente en effet par $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k$ l'un des facteurs du polynôme $F(x)$, et si l'on veut déterminer les fractions simples auxquelles la présence de ce facteur doit donner lieu, on écrira

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Mx+N}{[(x-\alpha^2)+\beta^2]^k}+\frac{M_1x+N_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}}+\frac{M_2x+N_2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-2}}+\ldots\ldots+\frac{\varpi(x)}{\varphi(x)}$$

en désignant par $\varphi(x)$ le produit de tous les facteurs dont se compose le polynome $F(x)$, à l'exception du facteur $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k$. Lorsqu'on réduira le second membre au même dénominateur, cette équation deviendra

$$f(x)=(Mx+N).\varphi(x)+(M_1x+N_1)[(x-\alpha)^2+\beta^2].\varphi(x)+\ldots+[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k.\varpi(x).$$

Si l'on prend les différentielles successives, puisque l'on donne à x les valeurs $x=\alpha\mp\beta\sqrt{-1}$ qui réduisent à zéro le facteur $(x-\alpha)^2+\beta^2$, on obtiendra, en remarquant que chacune de ces équations se partage en deux lorsqu'on égale séparément les parties réelles et les parties imaginaires, le nombre d'équations nécessaires pour la détermination des constantes M et N, M_1, et N_1, M_2, et N_2, etc.

Il en serait de même si le dénominateur de la frac-

présentait d'autres racines imaginaires et mul-

ions maintenant à l'intégration de la fonction

$$= \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots\ldots + f}{x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots\ldots + t}\,dx$$

us sommes proposée n° 265. D'après ce qu'on
s numéros précédents, on peut toujours, par
ition de la fraction qui multiplie dx en frac-
nples, faire dépendre cette intégration de celle
ielles suivantes,

$$\frac{A\,dx}{(x-a)^k},\quad \frac{(Mx+N)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2},\quad \frac{(Mx+N)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}.$$

iit donc à intégrer ces dernières différentielles.
ppelant ce qui a été dit n° 259, on voit sur-
que

$$\frac{A\,dx}{x-a} \qquad \text{donne} \qquad y = C + A.l(x-a),$$

int toujours la constante arbitraire introduite
tion;

$$\frac{x}{\cdot a)^k} \qquad \text{donne} \qquad y = C - \frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}.$$

ue

$$\frac{(Mx+N)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{M(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\dfrac{M\alpha+N}{\beta}\,\dfrac{dx}{\beta}}{\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}$$

donne

$$y = C + \frac{M}{2} \cdot l[(x-\alpha)^2 + \beta^2] + \frac{M\alpha + N}{\beta} \cdot \text{arc. tang.} \frac{x-\alpha}{\beta}.$$

273. 4° Enfin, qu'à l'égard de la fonction différentielle

$$\frac{(Mx+N)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k} = \frac{M(x-\alpha)dx + (M\alpha+N)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}$$

la première partie

$$\frac{M(x-\alpha)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2)^k}$$

a visiblement pour intégrale

$$C - \frac{M}{2(k-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}};$$

et quant à la seconde partie

$$\frac{(M\alpha+N)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k} = \frac{\dfrac{M\alpha+N}{\beta^{2k-1}} \cdot \dfrac{dx}{\beta}}{\left[\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right]^k}$$

qu'on peut en effectuer l'intégration comme il suit:

Posons $\frac{x-\alpha}{\beta} = t$, d'où $\frac{dx}{\beta} = dt$, cette dernière différentielle deviendra

$$\frac{M\alpha+N}{\beta^{2k-1}} \cdot \frac{dt}{(t^2+1)^k};$$

en sorte qu'il s'agit d'intégrer la fonction différentielle

$$\frac{dt}{(t^2+1)^k}.$$

Or, cette fonction pouvant se mettre sous la forme suivante (en ajoutant et retranchant t^2dt au numérateur)

$$\frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}} - \frac{t^2dt}{(t^2+1)^k},$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+1)^k}.$$

nsidérant dans l'intégrale $\int \frac{t^2dt}{(t^2+1)^k}$ les deux

t $\frac{2tdt}{(t^2+1)^k}$, et appliquant le procédé de l'in-

.r parties conformément à ce qu'on a vu dans

il vient

$$= -\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{(k-1)(t^2+1)^{k-1}} + \int \frac{dt}{2} \frac{1}{(k-1)(t^2+1)^{k-1}};$$

tuant dans l'équation précédente,

$$\frac{t}{-1)^k} = \frac{t}{2(k-1)(t^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2+)^{k-1}}.$$

fait dépendre l'intégrale cherchée d'une autre

: même nature, dans laquelle l'exposant k du

ır est diminué d'une unité. En continuant de

nanière on trouve pour l'expression de l'inté-

il s'agit

$$\frac{t}{-1)^{k-1}} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{k-1} + \frac{k-\frac{3}{2}}{k-1} \cdot \frac{t^2+1}{k-2} + \frac{k-\frac{3}{2}}{k-1} \cdot \frac{k-\frac{5}{2}}{k-2} \cdot \frac{(t^2+1)^2}{k-3} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \frac{k-\frac{3}{2}}{k-1} \cdot \frac{k-\frac{5}{2}}{k-2} \cdot \frac{k-\frac{7}{2}}{k-3} \cdot \frac{(t^2+1)^3}{k-4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots + \frac{k-\frac{3}{2}}{k-1} \cdot \frac{k-\frac{5}{2}}{k-2} \cdot \frac{k-\frac{7}{2}}{k-3} \ldots\ldots \frac{\frac{5}{2}}{3} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{2} \cdot \frac{(t^2+1)^{k-2}}{1} \end{array} \right]$$

$$\frac{k-\frac{5}{2}}{k-2} \cdot \frac{k-\frac{7}{2}}{k-3} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\frac{3}{2}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \text{arc. tang. } t.$$

Si l'on remplace dans cette expression t par sa valeur $\frac{x-\alpha}{\beta}$, et si l'on multiplie par $\frac{M\alpha+N}{\beta^{2k-1}}$, on aura donc (en ajoutant une constante arbitraire) l'expression de l'intégrale de la seconde partie $\frac{(M\alpha+N)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}$ de la différentielle proposée.

On pourra toujours, au moyen des notions qui viennent d'être présentées, effectuer l'intégration d'une fonction différentielle quelconque rationnelle.

XXV. INTÉGRATION DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES AFFECTÉES D'UN RADICAL DU SECOND DEGRÉ. DIFFÉRENTIELLES BINÔMES.

274. Lorsque les fonctions différentielles algébriques sont irrationnelles, on n'est point assuré en général d'en pouvoir effectuer l'intégration sous forme finie. Les procédés que l'on peut employer pour y parvenir consistent principalement à substituer à la variable x par rapport à laquelle la différentielle proposée est prise, une nouvelle variable t, en établissant, d'ailleurs, entre ces deux variables une relation telle, que l'irrationalité de la fonction proposée disparaisse par la substitution de la valeur de dx en t et dt.

275. Le cas le plus étendu dans lequel le succès de ces procédés soit assuré est celui où l'irrationalité de la fonction proposée tient seulement à la présence d'un radical du second degré, tel que $\sqrt{a+bx+cx^2}$, ou $\sqrt{a+bx-cx^2}$, a et b désignant des quantités constantes quelconques, et c une quantité constante positive. On peut toujours alors rendre cette fonction rationnelle, et par conséquent en

égration au moyen des procédés qui ont été
ıs l'article précédent.

r lieu, lorsque le signe du terme cx^2 est $+$,
en désignant par t une nouvelle variable,

$$\sqrt{a+bx-cx^2}=t-\sqrt{c}.x, \quad \text{ou} \quad a+bx=t^2-2\sqrt{c}.tx;$$

$$x=\frac{t^2-a}{\sqrt{c}.t+b}, \quad \text{et} \quad dx=\frac{2(\sqrt{c}.t^2+bt+a\sqrt{c})dt}{(2\sqrt{c}.t+b)^2},$$

ınt la substitution rendra évidemment la fonction
rationnelle.

n second lieu, lorsque le signe du terme cx^2 est
onction proposée deviendra également rationnelle
ose

$$\sqrt{a+bx-cx^2}=xt-\sqrt{a}, \quad \text{ou} \quad b-cx=xt^2-2\sqrt{a}.t;$$

$$x=\frac{b+\sqrt{a}.t}{c+t}, \quad \text{et} \quad dx=\frac{2(c\sqrt{a}-bt-\sqrt{a}.t^2)dt}{(c+t^2)},$$

; comme cette transformation, dans le cas où la
té a serait négative, introduirait des termes imagi-
, dans la différentielle proposée, on peut alors pro-
de la manière suivante. Remarquons que l'on est ici
; opérer sur des quantités réelles, et par conséquent
les valeurs de x telles que le radical $\sqrt{a+bx-cx^2}$
réel. Donc le trinôme $a+bx-cx^2$ a des valeurs
tives; d'où il suit que l'équation $x^2-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}=0$

a ses deux racines réelles. Représentons par ρ et ρ_1, ces racines. Nous poserons

$$\sqrt{a+bx-cx^2}=\sqrt{c(x-\rho)(\rho_1-x)}=\sqrt{c}(x-\rho)t, \text{ ou } \rho_1-x=(x-\rho)t^2;$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{\rho t^2+\rho_1}{t^2+1}, \quad \text{et} \quad dx=\frac{2(\rho-\rho_1)tdt}{(t^2+1)^2}.$$

Ces valeurs rendront rationnelle la différentielle proposée sans y introduire des quantités imaginaires.

277. L'irrationalité d'une fonction différentielle peut également disparaître lorsqu'elle résulte de la présence de deux radicaux différents du premier degré, tels que $\sqrt{a+x}$, $\sqrt{b+x}$, en écrivant

$$\sqrt{b+x}=t, \quad \text{d'où} \quad x=t^2-b, \quad dx=2t.dt.$$

Cette transformation fait disparaître le second radical en donnant au premier la forme $\sqrt{a-b+t^2}$, ce qui ramène la fonction proposée au cas du n° 275.

278. Nous indiquerons les applications les plus simples des procédés qui viennent d'être exposés.

Soit

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}:$$

la transformation du n° 275 changera cette différentielle en

$$dy=\frac{2dt}{2\sqrt{c}.t+b}.$$

$$y = \mathrm{C} + \frac{1}{\sqrt{c}} . l(2\sqrt{c} . t + b);$$

ant t par sa valeur en x,

$$\mathrm{C} + \frac{1}{\sqrt{c}} . l(b + 2cx + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2});$$

ient au même,

$$+ \frac{1}{\sqrt{c}} . l\left(\frac{b}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c} . x + \sqrt{a + bx + cx^2}\right).$$

ujours la constante arbitraire introduite par l'in-

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}}.$$

loie la première transformation du n° 276, cette e se changera en

$$dy = -\frac{2dt}{c + t^2}, \quad \text{ou} \quad dy = -\frac{2}{\sqrt{c}} . \frac{\frac{dt}{\sqrt{c}}}{1 + \frac{t^2}{c}},$$

grale est

$$y = \mathrm{C} - \frac{2}{\sqrt{c}} . \text{arc. tang.} \frac{t}{\sqrt{c}},$$

tant pour t sa valeur en x

$$y = \mathrm{C} - \frac{2}{\sqrt{c}} . \text{arc tang.} \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a + bx - cx^2}}{\sqrt{c} . x}$$

Si maintenant l'on emploie la seconde transformation du même numéro, la différentielle proposée se changera en

$$dy = -\frac{2}{\sqrt{c}}\,\frac{dt}{1+t^2},$$

dont l'intégrale est

$$y = \mathrm{C} - \frac{2}{\sqrt{c}}\,.\,\text{arc tang.}\,t\,;$$

et en remplaçant t par sa valeur

$$y = \mathrm{C} - \frac{2}{\sqrt{c}}\,.\,\text{arc tang.}\sqrt{\frac{\rho_1 - x}{x - \rho}},$$

ou (puisque ρ et ρ_1 sont respectivement les racines de l'équation $x^2 - \frac{b}{c}x - \frac{a}{c} = 0$)

$$y = \mathrm{C} - \frac{2}{\sqrt{c}}\,.\,\text{arc tang.}\sqrt{\frac{-2cx + b + \sqrt{4ac + b^2}}{2cx - b + \sqrt{4ac + b^2}}}.$$

Ces deux expressions de l'intégrale demandée y, peuvent être employées et ne diffèrent l'une de l'autre que par la valeur de la constante arbitraire.

280. Dans le cas particulier où la différentielle proposée serait

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

on aurait $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$. La formule du n° 278 donnerait

$$y = \mathrm{C} + l(x + \sqrt{1+x^2}).$$

:as où cette différentielle serait

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

aurait $y = C + \text{arc sin. } x$. En effet, la pre-
.u n° 279 donne

$$= C - 2 \text{ arc tang. } \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{x}.$$

$= \varphi$: cette expression deviendra

$$;. \frac{1+\cos.\varphi}{\sin.\varphi} = C - 2 \text{ arc tang. } \frac{\cos.\frac{1}{2}\varphi}{\sin.\frac{1}{2}\varphi} = C + \varphi.$$

seconde formule du n° 279 donne

$$y = C - 2 \text{ arc tang. } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$y = C - \text{arc tang. } \frac{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\frac{1-x}{1+x}},$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = C - \text{arc tang. } \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi} = C - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = C + \varphi.$$

uons, d'ailleurs, que l'on pourrait déduire
fonction différentielle

$$dx = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

de la formule du n° 278 en y faisant $a=1$, $b=0$, $c=-1$. On trouverait ainsi l'expression imaginaire

$$y = C + \frac{1}{\sqrt{-1}} . l(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}).$$

Pour que cette expression s'accorde avec l'expression réelle $y = C + \text{arc sin. } x$, il est visible que l'on doit attribuer dans l'une et l'autre la même valeur à la constante arbitraire, puisqu'elles donnent également $y = C$ quand on y fait $x=0$. Donc

$$\text{arc. sin.} x = \frac{1}{\sqrt{-1}} . l\left(x\sqrt{-1} + x\sqrt{1-x^2}\right),$$

ou

$$\varphi\sqrt{-1} = l(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi),$$

équation qui s'accorde avec ce qu'on a vu dans l'article XII.

283. Nous remarquerons encore que pour effectuer l'intégration de la différentielle

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}},$$

il peut paraître plus simple de ne pas employer l'une ou l'autre des transformations dont on a fait usage n° 279 et de ramener immédiatement cette différentielle à la forme $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

On aura de cette manière

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x - x^2}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}-\left(x-\frac{b}{2c}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{\frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{b}{2c}}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}\right)^2}};$$

est

$$=C+\frac{1}{\sqrt{c}}\text{arc. sin.}\frac{x-\frac{b}{2c}}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}$$

$$=C+\frac{1}{\sqrt{c}}\text{arc. sin.}\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}.$$

xpression ne diffère encore de celles qui ont 279 que par la valeur de la constante arbi-

amener de la même manière la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

$\frac{dt}{1+t^2}$, dont l'intégrale a été donnée n° 280; ndrait pas ainsi une expression plus simple du n° 278.

Différentielles binômes.

284. Cette expression désigne les différentielles de la forme

$$dy = dx \,.\, x^{m-1}(a + bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

a et b désignant des constantes, m et n des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires, p et q des nombres entiers. Nous remarquerons en premier lieu que la généralité de cette fonction n'est pas diminuée lorsque m et n sont supposés entiers, et même lorsque n est supposé positif. En effet, on passera du cas général à celui-ci par des transformations très-faciles. Cela posé, nous devons chercher en premier lieu les cas où la différentielle précédente peut être rendue rationnelle.

1° Si l'on pose

$$a + bx^n = t^q,$$

d'où

$$x = \left(\frac{t^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad dx = dt \,.\, \frac{qt^{q-1}}{nb}\left(\frac{t^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}$$

la différentielle proposée se changera en

$$dy = dt \,.\, \frac{qt^{p+q-1}}{nb}\left(\frac{t^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}$$

Elle deviendra donc rationnelle si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier.

2° Si l'on pose

$$a + bx^n = x^n t^q,$$

$$\cdot b\Big)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad dx = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{t^q - b}\right)^{\frac{1}{n}-1} . d\frac{a}{t^q - b},$$

.e proposée se changera en

$$dy = \frac{t^p}{n}\left(\frac{a}{t^q - b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-1} . d\frac{a}{t^q - b},$$

:a donc rationnelle si $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ est un nombre

ıs sont les seuls pour lesquels on soit assuré de
:rentielle binôme rationnelle.
ɔourrons, d'après ce qui précède, intégrer toute
le la forme

$$(a+bx^n)^{\frac{p}{q}},\ (a+bx^n)^{\frac{r}{s}},\ (a+bx^n)^{\frac{t}{u}},\ \text{etc.}]x^{n-1}.dx,$$

s, t, u, etc., désignant des nombres entiers, et
ın rationnelle des quantités contenues dans la
n effet, la fonction proposée deviendra ration-
ɔse

$$a + bx^n = t^{qsu\ldots},$$

ı également toute différentielle de la forme

$$\left.\frac{+bx^n}{+b'x^n}\right)^{\frac{p}{q}},\ \left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{r}{s}},\ \left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{t}{u}},\ \text{etc.}\Big]x^{n-1}.dx;$$

elle devenant rationnelle lorsqu'on pose

$$\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}=t^{qu\ldots}.$$

286. Lorsque la différentielle binôme

$$dy=dx\,.\,x^{m-1}(a+bx^n)^p$$

(p désignant un nombre fractionnaire) ne peut pas être rendue rationnelle, on cherche à la réduire à une forme plus simple en diminuant les exposants m ou p. Ces réductions s'opèrent au moyen de *l'intégration par parties*, dont le principe a été indiqué n° 260.

1° m étant supposé positif, on diminuera cet exposant comme il suit. On a

$$y=\int x^{m-n}(a+bx^n)^p.\,x^{n-1}\,dx$$

ou

$$y=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b}-\frac{m-n}{n(p+1)b}\int dx.\,x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}.$$

Mais

$$\begin{aligned}\int dx\,.\,x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}&=\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p(a+bx^n)dx\\&=a\int dx\,.\,x^{m-n-1}(a+bx^n)^p+by:\end{aligned}$$

donc

$$y=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b}-\frac{m-n}{n(p+1)}y-\frac{(m-n)a}{n(p+1)b}\int dx\,.\,x^{m-n-1}(a+bx^n)^p;$$

ou enfin

$$y=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}-(m-n)a\int dx.x^{m-n-1}(a+bx^n)^p}{(m+np)b}.$$

On a fait dépendre l'intégrale demandée d'une autre intégrale de même forme, dans laquelle l'exposant $m-1$ est diminué

En continuant à appliquer la même formule
:et exposant du plus grand multiple de n qui

;upposé positif, on diminuera également cet
manière suivante :

$$^{n-1}(a+bx^n)^{p-1}(a+bx^n)$$
$$x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}+b\int dx.x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}.$$

e du numéro précédent donnera, en changeant
:t p en $p-1$,

$$.+bx^n)^{p-1}=\frac{x^m(a+bx^n)^p-ma\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}}{(m+np)b};$$

ant cette valeur dans l'équation précédente il

$$\frac{x^m(a+bx^n)^p+npa\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}}{m+np}.$$

cette formule, l'exposant p peut, dans la diffé-
osée, être diminué du plus grand nombre en-
contenu.
osant m était négatif, on emploierait la formule
a, d'après ce qui précède,

$$^{n}x^n)^p=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}-(m+np)b\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^p}{(m-n)a};$$

ant $-m+n$ au lieu de m, on a

$$=-\frac{x^{-m}(a+bx^n)^{p+1}+(m-n-np)b\int dx.x^{-m+n-1}(a+bx^n)^p}{ma}.$$

4° Si l'exposant p était négatif, on remarquerait que, d'après ce qui précède,

$$\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}=-\frac{x^m(a+bx^n)^p-(m+np)\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^p}{npa}$$

puis en mettant $-p+1$ au lieu de p, il vient

$$\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{-p}=\frac{x^m(a+bx^n)^{-p+1}-(m+n-np)\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{-p+1}}{n(p-1)a}.$$

Les formules précédentes ne pourraient pas être employées si l'on avait $m+np=0$, ou $m-n=0$. Mais dans ces deux cas la différentielle binôme peut être rendue rationnelle, conformément à ce qu'on a vu dans le n° 284. Remarquons, d'ailleurs, que dans les cas mêmes où cette différentielle est rationnelle, ou peut être rendue rationnelle, l'usage des formules de réduction dont il s'agit est généralement le moyen le plus simple d'obtenir l'intégrale demandée. On a vu un exemple de cette manière dans le n° 273.

287. Prenons encore pour exemple la différentielle

$$dy=\frac{x^r dx}{\sqrt{ax-x^2}}=dx.x^{r-\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous emploierons la première formule du numéro précédent dans laquelle on fera $m=r+\frac{1}{2}$, $n=1$, $p=-\frac{1}{2}$, $b=-1$, et l'on trouvera ainsi

$$y=-\frac{x^{r-1}\sqrt{ax-x^2}}{r}+\frac{(2r-1)a}{2r}\int\frac{x^{r-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

En continuant à appliquer la même formule, on parviendra

idemment à la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

i rentre dans les cas traités dans les numéros 279 et suits, et dont l'intégrale, qui s'obtient immédiatement d'après qu'on a vu n° 283, est

$$C + \text{arc. sin.}\frac{2x-a}{a}.$$

VI. INTÉGRATION DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES LOGARITHMIQUES, EXPONENTIELLES ET CIRCULAIRES.

38. Les intégrales des fonctions différentielles de cette re ne s'obtiennent sous forme finie que dans quelques particuliers.

voit en premier lieu, conformément à l'une des reues qui ont été faites dans le n° 262, que si l'intéde la fonction différentielle $dx.f(x)$ est connue, on ûtra également les intégrales des fonctions différen-

$x)$, $dx.e^x.f(e^x)$, $dx.\cos.x.f(\sin.x)$, $dx.\sin.x f(\cos.x)$,

$f(\text{arc. tang.}x)$, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.f(\text{arc. sin.}x)$, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.f(\text{arc. cos.}x)$.

reconnaît également que le signe f désignant une n algébrique des quantités affectées par ce signe, rra rendre algébriques les fonctions différentielles

$$dx.f(e^x), \qquad dx.f(\sin.x, \cos.x),$$

en posant $e^x = t$ pour la première, et $\sin.x = t$ ou $\cos.x = t$ pour la seconde. Par conséquent, ces fonctions pourront être intégrées lorsque la fonction f sera rationnelle, ou pourra être rendue rationnelle.

Il en sera de même si l'on a sous le signe de fonction f les quantités $\sin.2x$, $\sin.3x$, $\sin.4x$, etc., ou $\cos.2x$, $\cos.3x$, $\cos.4x$, etc., parce que les sinus ou cosinus des arcs multiples peuvent être exprimés rationnellement au moyen des puissances du sinus ou du cosinus de l'arc simple par des formules qui se déduisent immédiatement du théorème de Moivre. (V. nos 117 et suivants.)

289. On voit aussi que les fonctions différentielles transcendantes peuvent quelquefois être intégrées lorsqu'elles sont de la forme

$$dx.Pz^n,$$

P désignant une fonction algébrique, z une fonction transcendante dont le coefficient différentiel du premier ordre est algébrique, et n un nombre entier positif. Tel serait le cas où l'on aurait $z = l.f(x)$, $z = \text{arc tang.} f(x)$, en désignant par $f(x)$ une fonction algébrique de z.

En effet, en intégrant par parties la différentielle proposée, il viendra, en posant $Q = \int dx.P$,

$$\int dx.Pz^n = Qz^n - n\int dxQ.z^{n-1}\frac{dz}{dx};$$

puis en posant $R = \int dx.Q\frac{dz}{dx}$, on aura également

$$\int dx.Qz^{n-1}\frac{dz}{dx} = Rz^{n-1} - (n-1)\int dx.Rz^{n-2}\frac{dz}{dx};$$

osant $S = \int dx . R \frac{dz}{dx}$,

$$dx . Rz^{n-2} \frac{dz}{dx} = Sz^{n-2} - (n-2) \int dx . Sz^{n-3} \frac{dz}{dx};$$

de suite. Cette opération fournira, quelque soit n, ctions d'intégrales, et dans le cas de n entier po- donnera l'intégrale demandée si l'on peut trouver ion finie des quantités désignées par Q, R, S, etc.

Un exemple simple de l'opération dont il s'agit, égration de la différentielle

$$dy = dx(lx)^n,$$

ne, n étant un nombre entier positif,

$$+ x(lx)^n \left[1 - \frac{n}{lx} + \frac{n(n-1)}{(lx)^2} - \ldots\ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots\ldots 3.2.1}{(lx)^n}\right].$$

encore

$$dy = dx . x^{a-1}(lx)^n,$$

dra

$$+ \frac{x^a}{a}(lx)^n \left[1 - \frac{n}{alx} + \frac{n(n-1)}{a^2(lx)^2} - \ldots\ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots\ldots 3.2.1}{a^n(lx)^n}\right].$$

. L'intégration par parties donne de la même ma- l'intégrale de la différentielle

$$dy = dx . x^n e^{ax}.$$

On a en effet

$$\int dx \,.\, x^n e^{ax} = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int dx . x^{n-1} e^{ax} ;$$

et en appliquant la même transformation à l'intégrale du second membre, il viendra

$$\int dx . x^n e^{ax} = C + \frac{x^n e^{ax}}{a}\left[1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2x^2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{a^n x^n}\right].$$

On trouvera par le même procédé

$$\int dx \,.\, x^n \cos.ax = C + \frac{x^n}{a}\left\{\sin.ax\left[1 - \frac{n(n-1)}{a^2x^2} + \text{etc.}\right]\right.$$
$$\left. + \cos.ax\left[\frac{n}{ax} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3} + \text{etc.}\right]\right\}$$
$$\int dx \,.\, x^n \sin.ax = C - \frac{x^n}{a}\left\{\cos.ax\left[1 - \frac{n(n-1)}{a^2x^2} + \text{etc.}\right]\right.$$
$$\left. - \sin.ax\left[\frac{n}{ax} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3} + \text{etc.}\right]\right\}.$$

292. L'intégration par parties donnant

$$\int dx \,.\, e^{ax} \cos.bx = \frac{e^{ax} \cos.bx}{a} + \frac{b}{a} \int dx \,.\, e^{ax} \sin.bx$$
$$\int dx \,.\, e^{ax} \sin.bx = \frac{e^{ax} \sin.bx}{a} - \frac{b}{a} \int dx \,.\, e^{ax} \cos.bx,$$

on tire de ces deux équations

$$\int dx \,.\, e^{ax} \cos.bx = C + \frac{a \cos.bx + b \sin.bx}{a^2 + b^2} e^{ax}$$
$$\int dx \,.\, e^{ax} \sin.bx = C + \frac{a \sin.bx - b \cos.bx}{a^2 + b^2} e^{ax}.$$

sance de ces deux intégrales mettrait à même leur tour les différentielles $dx.x^n e^{ax} \cos. bx$ et bx, par le procédé dont on a fait usage dans le édent.

que les différentielles contenant des fonctions es ne peuvent être intégrées sous forme finie, u moins à les faire dépendre de fonctions plus mi les formules de réduction employées à cet distinguerons celles qui conviennent à la diffé-

$$dy = dx.\sin.^m x.\cos.^n x,$$

résentant des nombres quelconques positifs ou

remarquer d'abord que cette différentielle se ilement aux différentielles binômes, dont on é dans les numéros 284 et suivants. En effet

$$dy = dx.\sin.^m x(1 - \sin.^2 x)^{\frac{n}{2}}$$

osant $\sin. x = t$, d'où $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$,

$$dy = dt.t^m(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}:$$

qui deviendrait rationnelle si n était impair. On lonc employer les formules de réduction du n° 286, onvient mieux d'opérer directement sur la différen- posée.

l'exposant m est positif, on diminuera cet exposant

sans augmenter n, en observant que

$$y = \int \sin.^{m-1} x \,.\, \cos.^{n} x \,.\, \sin. x dx.$$

Donc

$$y = -\frac{\sin.^{m-1} x \,.\, \cos.^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int dx \,.\, \sin.^{m-2} x \,.\, \cos.^{n+2} x,$$

ou

$$y = -\frac{\sin.^{m-1} x \,.\, \cos.^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \left[\int dx \,.\, \sin.^{m-2} x \,.\, \cos.^{n} x - y \right],$$

équation d'où l'on tire

$$\int dx \,.\, \sin.^{m} x . \cos.^{n} x = -\frac{\sin.^{m-1} x . \cos.^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int dx . \sin.^{m-2} x . \cos.^{n} x.$$

2° Si l'exposant n est positif, on diminuera cet exposant sans augmenter m, en employant la formule suivante, que l'on obtient d'une manière semblable,

$$\int dx \,.\, \sin.^{m} x \,.\, \cos.^{n} x = \frac{\sin.^{m+1} x \,.\, \cos.^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dx \,.\, \sin.^{m} x . \cos.^{n-2} x.$$

3° Si l'exposant m était négatif, on remarquerait que l'on tire de la première équation qui vient d'être obtenue

$$\int dx \,.\, \sin.^{m-2} x \,.\, \cos.^{n} x = \frac{\sin.^{m-1} x \,.\, \cos.^{n+1} x}{m-1} + \frac{m+n}{m-1} \int dx \,.\, \sin.^{m} x \,.\, \cos.^{n} x;$$

et en changeant m en $-m+2$,

$$\int dx \frac{\cos.^{n} x}{\sin.^{m} x} = -\frac{\cos.^{n+1} x}{(m-1) \sin.^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1} \int dx \frac{\cos.^{n} x}{\sin.^{m-2} x}.$$

4° Enfin, si l'exposant n était négatif, on remarquerait

; que la seconde des équations qui viennent d'être donne

$$\cos.^{n-2}x = -\frac{\sin.^{m+1}x.\cos.^{n-1}x}{n-1} + \frac{m+n}{n-1}\int dx.\sin.^{m}x.\cos.^{n}x;$$

ngeant n en $-n+2$,

$$\frac{\sin.^{m}x}{\cos.^{n}x} = \frac{\sin.^{m+1}x}{(n-1)\cos.^{n-1}x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int dx\,\frac{\sin.^{m}x}{\cos.^{n-2}x}.$$

'armi les cas particuliers compris dans les formules tes, on peut distinguer les suivants :

$$.\sin.^{m}x = -\frac{\sin.^{m-1}x.\cos.x}{m} + \frac{m-1}{m}\int dx.\sin.^{m-2}x$$

$$:.\cos.^{n}x = \frac{\sin.x.\cos.^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}\int dx.\cos.^{n-2}x$$

$$\frac{dx}{\sin.^{m}x} = -\frac{\cos.x}{(m-1)\sin.^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{\sin.^{m-2}x}$$

$$\frac{dx}{\cos.^{n}x} = \frac{\sin.x}{(n-1)\cos.^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos.^{n-2}x}$$

$$\int\frac{\sin.^{n}x}{\cos.^{n}x} = \int dx.\tang.^{n}x = \frac{\tang.^{n-1}x}{n-1} - \int dx.\tang.^{n-2}x$$

$$\int\frac{\cos.^{n}x}{\sin.^{n}x} = \int dx.\cot.^{n}x = -\frac{\cot.^{n-1}x}{n-1} - \int dx.\cot^{n-2}x.$$

D'après les réductions indiquées dans le n° 293, on jours dépendre l'intégration des différentielles de la $dx.\sin.^{m}x.\cos.^{n}x$ de l'intégration d'autres différen- le la même forme, mais dans lesquelles les expo- m et n ne dépasseront pas 1 et -1. Et lorsque les nts m et n seront des nombres entiers quelconques ou négatifs, l'intégration de la différentielle pro-

posée se trouvera dépendre définitivement de l'intégration de l'une des neuf différentielles dont nous donnons ci-dessous les intégrales, savoir :

$$\int dx = C + x, \qquad \int dx.\sin.x.\cos.x = C + \frac{1}{2}\sin.^2 x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin.x.\cos.x} = C + l.\tang.x, \qquad \int dx.\sin.x = C - \cos.x,$$

$$\int dx \frac{\sin.x}{\cos.x} = C - l.\cos.x, \qquad \int \frac{dx}{\sin.x} = C + l.\tang.\frac{x}{2},$$

$$\int dx.\cos.x = C + \sin.x, \qquad \int dx \frac{\cos.x}{\sin.x} = C + l.\sin.x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos.x} = C + l.\tang.\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Ainsi, dans le cas où m et n sont des nombres entiers, on obtiendra toujours sous forme finie l'intégrale de la différentielle dont il s'agit.

Nous remarquerons enfin que l'on pourrait également intégrer les fonctions différentielles de cette espèce en remplaçant $\sin.^m x$ et $\cos.^n x$ par leurs expressions en fonctions linéaires des sinus et cosinus de l'arc x et de ses multiples qui ont été données dans les numéros 136 et suivants, expressions composées d'un nombre déterminé de termes lorsque m et n sont des nombres entiers positifs.

296. D'après la forme que ce dernier procédé donne à la différentielle

$$dx.\sin.^m x.\cos.^n x$$

lorsque m et n sont entiers positifs, il est évident qu'en opérant comme on l'a fait dans les numéros 291 et 292, on intégrera dans le même cas la différentielle

$$dx.x^i.\sin.^m x.\cos.^n x,$$

un nombre entier positif, ou plus généraleielle

$$dx.P\sin.^m x.\cos.^n x,$$

ıne fonction rationnelle et entière de x.
ntielles de la forme

$$P(\text{arc}\sin.x)^n \quad \text{ou} \quad dx.P(\text{arc}\cos.x)^n$$

aux précédentes en posant

$$x = \sin.t \quad \text{ou} \quad x = \cos.t.$$

XXVII. INTÉGRATION PAR SÉRIES.

fonction quelconque pouvant en général être en une série ordonnée suivant les puissances la variable, on peut obtenir sous la même ɔression de l'intégrale d'une différentielle quelinsi, comme l'on a en général, d'après le n° 81,

$$f(0)+f'(0).x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{2.3}x^3+\frac{f^{\text{IV}}(0)}{2.3.4}x^4+\text{etc.},$$

galement

$$+f(0).x+f'(0)\frac{x^2}{2}+\frac{f''(0)}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{f'''(0)}{2.3}\frac{x^4}{4}+\frac{f^{\text{IV}}(0)}{2.3.4}\frac{x^5}{5}+\text{etc.},$$

ınt la constante arbitraire qui doit être ajoutée ımer à l'intégrale la généralité nécessaire. Cette n en série de l'intégrale $\int dx.f(x)$ peut être employée ; fois que la série est convergente,

remarquerons de plus que si la série qui donne le

développement de $f(x)$ est convergente pour toutes les valeurs de la variable comprises entre 0 et une certaine limite x, la série qui donne le développement de $\int dx.f(x)$ le sera à plus forte raison. En effet, la série $f(0)+f'(0).x+$etc. ne peut converger vers $f(x)$ qu'autant que le terme complémentaire $\frac{f^{\mu}(\theta x)}{2.3.4.....\mu}x^{\mu}$ (*Voyez* n° 86) devient plus petit que toute grandeur donnée, pour les valeurs de la variable dans l'intervalle indiqué, lorsqu'on augmente indéfiniment le nombre μ. Or c'est l'intégrale, prise à partir de $x=0$, de cette quantité multipliée par dx, qui fournit le terme complémentaire du développement de $\int dx.f(x)$. Celui-ci est donc la somme des valeurs que prend le produit

$$\frac{f^{\mu}(\theta x)}{2.3.4.....\mu}x^{\mu}dx$$

lorsque x passe de 0 à sa valeur extrême par une suite d'accroissements infiniment petits et égaux dx; il est ainsi égal au produit de l'intervalle total que x parcourt par la valeur moyenne de $\frac{f^{\mu}(\theta x)}{2.3.4.....\mu}x^{\mu}$, et il tend vers zéro comme cette valeur elle-même lorsque μ augmente à l'infini.

298. Lorsque la fonction $f(x)$ se trouve dans les cas d'exception qui ont été remarqués numéros 88 et suivants, c'est-à-dire lorsque le développement de cette fonction contient des puissances fractionnaires ou négatives de x, on peut également employer ce développement pour obtenir l'expression de l'intégrale $\int dx.f(x)$ en série, expression qui pourra servir au calcul numérique de cette intégrale si la série est convergente.

299. L'intégration par série est quelquefois le procédé le plus simple que l'on puisse employer pour obtenir le

pement d'une fonction suivant les puissances en-
cendantes ou descendantes de la variable.
, par exemple,

$$l(1+x)=\frac{dx}{1+x}=dx(1-x+x^2-x^3+x^4-\text{etc.}):$$

$$+x)=\int\frac{dx}{1+x}=C+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\text{etc.}$$

stante arbitraire C doit être déterminée de manière
galité des deux membres subsiste pour une valeur
ique de x. Or, en faisant $x=0$, le premier membre
uit à zéro, et la série du second membre disparaît.
$=0$; d'où l'on conclut

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\text{etc.}$$

on l'a vu n° 102.

On a de la même manière

$$\text{arc tang.}x=\frac{dx}{1+x^2}=dx(1-x^2+x^4-x^6+x^8-\text{etc.}),$$

nséquent

$$\text{tang.}x=\int\frac{dx}{1+x^2}=C+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\text{etc.},$$

me la constante est nulle, il vient

$$\text{arc tang.}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\text{etc.},$$

ie on l'a vu dans le n° 115. Remarquons, d'ailleurs,

que cette série n'est convergente qu'autant que x ne surpasse pas l'unité. On peut en obtenir une autre qui soit au contraire convergente lorsque x surpasse l'unité en écrivant

$$d.\text{arc tang.}x = \frac{dx}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{dx}{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}-\text{etc.}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\text{arc tang.}x = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \frac{1}{9x^9} + \text{etc.}$$

et comme $x = \frac{1}{0}$ réduit cette équation à $\frac{\pi}{2} = C$, on trouve définitivement

$$\text{arc tang.}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \frac{1}{9x^9} + \text{etc.}$$

Cette série ne convient qu'autant que x est comprise entre 1 et $\frac{1}{0}$.

301. L'équation

$$d.\text{arc sin.}x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dx\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8+\text{etc.}\right)$$

donne de la même manière, en observant que la valeur de la constante est zéro,

$$\text{arc sin.}x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{x^9}{9} + \text{etc.},$$

et en faisant $x = 1$ on trouve cette expression du nombre π,

$$= 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\frac{1}{9} + \text{etc.}$$

)n peut d'ailleurs obtenir le développement en série ıtégrale demandée $\int dx \,.\, f(x)$, non-seulement en dé- ıt la fonction $f(x)$ suivant les puissances de x, ce ıonne à intégrer que des termes de la forme $ax^m dx$, : décomposant la fonction $f(x)$ en deux facteurs, ou ınt sous la forme $\varphi(x) \,.\, \psi(x)$, puis développant un seul facteurs, par exemple $\psi(x)$. Les termes du dévelop- . qui doivent être intégrés sont alors de la forme $c \,.\, dx$, et il est nécessaire que l'intégration puisse . effectuée par les méthodes connues.

par exemple la différentielle

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(ax - x^2)(1 - bx)}}.$$

ɛveloppant le facteur $(1 - bx)^{-\frac{1}{2}}$ il viendra

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} \left(1 + \frac{1}{2}\,bx + \frac{1.3}{2.4}\,b^2x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,b^3x^3 + \text{etc.}\right).$$

ıue terme de la série donne à intégrer une différen- e de la forme $\dfrac{x^r dx}{\sqrt{ax - x^2}}$, ce qu'on peut faire d'après qui a été dit dans le n° 287.

XXVIII. INTÉGRALES DÉFINIES.

303. Revenons aux notions présentées dans les numé-

ros 255 et suivants. Soit en général

$$f(x).dx$$

une fonction différentielle quelconque de la variable x, et désignons par

$$F(x)$$

l'intégrale de cette fonction différentielle, ou la fonction qui étant différentiée, aura $f(x).dx$ pour différentielle. Cela revient à poser

$$d.F(x) = f(x).dx,$$

ou plus généralement

$$d[C + F(x)] = f(x).dx,$$

C désignant une quantité constante entièrement arbitraire. Et la fonction $F(x)$ pourra être déduite de la fonction différentielle $f(x).dx$, quand celle-ci sera donnée, au moyen des méthodes qui ont été exposées dans les articles précédents. Cela posé, d'après ce qu'on a vu dans les numéros 255 et suivants, une fonction quelconque peut toujours être regardée comme étant la somme d'un nombre infini de valeurs de sa différentielle. Ainsi, l'expression

$$C + F(x)$$

représente en général la somme d'un nombre infini de valeurs de la différentielle $f(x).dx$. Tant que la constante C demeure indéterminée, la valeur de x à partir de laquelle on a commencé à sommer les différentielles est également indéterminée; et quant à la valeur de x à laquelle la somme

nine, c'est la valeur même de cette variable qui se sous le signe de la fonction F.

arquons maintenant qu'un grand nombre de questions importantes exigent la recherche de la somme d'un e infini de valeurs d'une différentielle proposée, cette e étant prise depuis une certaine valeur x_0 de x, à de laquelle les différentielles successives sont suppo- ajouter les unes aux autres, jusqu'à une autre va- x_ω de cette même variable, au delà de laquelle on d'ajouter les différentielles. Cette somme s'exprime iquement d'une manière générale comme il suit,

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.f(x),$$

açant au-dessous du signe $\int$ la valeur de la variable à de laquelle les différentielles commencent à être ajou- et au-dessus de ce signe la valeur de la variable à la- cesse cette addition. L'expression dont il s'agit est ce nomme une *intégrale définie*, en entendant par là intégrale, ou la somme des différentielles, est prise des limites déterminées; x_0 est la *limite inférieure*, la *limite supérieure* de l'intégrale. Les intégrales défi- onstituent d'ailleurs, comme on le verra dans la suite, ouveau genre de fonctions dont l'usage est fort étendu l'analyse.

opposition aux *intégrales définies*, les géomètres don- souvent le nom d'*intégrale indéfinie* à l'expression

$$C + F(x)$$

la recherche a été l'objet des articles précédents, qui ait simplement de la manière la plus générale à la

condition d'avoir $f(x).dx$ pour différentielle, et qui représente la somme des valeurs de cette différentielle prise depuis une valeur indéterminée de x jusqu'à la valeur quelconque que l'on voudra attribuer à cette variable dans le terme $F(x)$. Or, la connaissance de l'intégrale indéfinie d'une différentielle proposée donne en général immédiatement celle d'une intégrale définie relative à cette même différentielle prise entre des limites quelconques. En effet, si l'on fait $x = x_0$ dans l'expression $C + F(x)$, on aura

$$C + F(x_0)$$

pour exprimer la somme des valeurs de la différentielle $f(x).dx$ prises depuis une certaine valeur indéterminée de x jusqu'à la valeur x_0; et si l'on fait $x = x_\omega$ dans la même expression, sans changer la constante C, on aura

$$C + F(x_\omega)$$

pour exprimer la somme des valeurs de cette différentielle prise depuis la même valeur indéterminée de x jusqu'à la valeur x_ω. Donc, la différence de ces deux expressions, c'est-à-dire

$$F(x_\omega) - F(x_0)$$

représente la somme des valeurs de la différentielle dont il s'agit, prise depuis la valeur x_0 de x jusqu'à la valeur x_ω.

On voit par ce qui précède que l'équation

$$d.F(x) = f(x).dx$$

entraîne généralement la suivante

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.f(x) = F(x_\omega) - F(x_0);$$

ce que l'on a la valeur d'une intégrale définie en
nt l'une de l'autre les deux valeurs que prend l'in-
définie lorqu'on y donne à la variable les valeurs
dantes aux limites inférieure et supérieure entre
l'intégrale définie doit être prise.

résulte de ce qui précède que l'on obtient tou-
ment la valeur numérique d'une intégrale définie

(x), lorsqu'on peut obtenir sous forme finie, ou

nvergente, la fonction $F(x)$, dont la différen-
. $f(x)$. Cela n'est pas toujours possible, et quand
y parvenir, on est obligé de calculer la valeur
dont il s'agit par des méthodes d'approximation
xposées dans la suite. Dans les cas même où la
peut être obtenue sous forme finie, l'usage des
pproximation est souvent préférable à la re-
e de cette fonction.

tions précédentes deviendront très-sensibles si
, comme on l'a déjà fait dans le n° 256, la va-
e l'abscisse, et la fonction $F(x)$, ou plus géné-
(x), comme l'ordonnée d'une courbe. Une
elconque

$$d[C + F(x)] = f(x).dx$$

représente l'accroissement infiniment petit
rsqu'on passe de l'abscisse x à l'abscisse
me de ces accroissements de l'ordonnée qui
ne certaine valeur x_0 de x jusqu'à une autre
évidemment égale à l'excès de l'ordonnée
ernière limite sur l'ordonnée répondant à la
'est-à-dire à $y_\omega - y_0$ ou $F(x_\omega) - F(x_0)$.

306. Remarquons, d'ailleurs, que l'équation précédente

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.f(x) = F(x_\omega) - F(x_0),$$

dans laquelle $F(x)$ est telle que l'on a $d.F(x) = dx.f(x)$, ne s'applique pas aux cas où les fonctions $f(x)$ ou $F(x)$ deviendraient infinies pour une valeur de x comprise entre les limites x_0 et x_ω de l'intégrale définie. En effet, lorsqu'on a exposé dans le n° 255 des considérations d'où il résulterait qu'une intégrale quelconque représente toujours la somme d'un nombre infini de valeurs de la différentielle, on a dû exclure les cas où les fonctions dont il s'agit prendraient des valeurs infinies.

Lorsqu'on demande la valeur d'une intégrale définie $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.f(x)$, et qu'il arrive que la fonction $f(x)$ devient infinie pour une certaine valeur a de x comprise entre les limites x_0 et x_ω de l'intégrale, on ne peut en général obtenir la valeur cherchée qu'en partageant l'intégrale en deux parties, dont la première finit et dont la seconde commence à la valeur $x = a$, c'est-à-dire en considérant séparément les deux intégrales définies

$$\int_{x_0}^{a} dx.f(x) \qquad \text{et} \qquad \int_{a}^{x_\omega} dx.f(x),$$

dont la somme donnera la valeur demandée. Cette somme aura une valeur infinie si les deux parties ont elles-mêmes des valeurs infinies et de même signe, ou si l'une seulement des deux parties est infinie. Elle aura une valeur indéterminée si les deux parties ont des valeurs infinies de signes contraires. Enfin elle aurait une valeur finie déterminée si les deux parties avaient des valeurs finies.

même, s'il se trouvait entre les limites x_0 et x_ω deux rs a et a_1, pour lesquelles $f(x)$ devînt infinie, on devrait ger de cette manière l'intégrale définie proposée,

$$\int_{x_0}^{a} dx.f(x)+\int_{a}^{a_1} dx.f(x)+\int_{a_1}^{x_\omega} dx.f(x),$$

déterminer à part la valeur de chaque terme. Et ainsi de e si le nombre des valeurs intermédiaires qui rendent $f(x)$ nie était plus considérable.

307. Il résulte de ce qui précède qu'il revient au même de anger le signe dont une intégrale définie est affectée, ou renverser l'ordre des limites. Ainsi

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.f(x)=-\int_{x_\omega}^{x_0} dx.f(x).$$

On peut d'ailleurs changer la variable x qui est sous le signe l'intégration définie, pourvu que l'on change en même temps es limites de manière à leur conserver les mêmes valeurs absolues. Si, par exemple, dans l'expression précédente, on veut remplacer x par une nouvelle variable t, en établissant entre ces deux quantités la relation quelconque $x=\varphi(t)$, on devra remplacer dx par $d.\varphi(t)$ ou $\varphi'(t)dt$, et x_0, x_ω par les valeurs de t qui seraient déduites respectivement des équations $x_0=\varphi(t)$, $x_\omega=\varphi(t)$.

308. Nous remarquons enfin que la considération des intégrales définies peut servir à trouver le développement connu sous le nom de théorème de Taylor, et conduit à une expression remarquable de la partie que l'on néglige en s'arrêtant à un nombre déterminé de termes. D'après ce qui a été dit dans le n° 303 on aura, quelle que soit la fonction f, pourvu que

cette fonction soit continue entre les valeurs x et $x+h$ de la variable,

$$f(x+h)-f(x)=\int_x^{x+h} dx.f'(x),$$

$f'(x)$ désignant le coefficient différentiel ou la fonction dérivée du premier ordre de la fonction $f(x)$. Or, on peut remplacer, dans l'intégrale définie du second membre, x par $x+h-t$, en désignant par t une nouvelle variable, ce qui changera cette intégrale, en ayant égard à ce qui a été dit dans le numéro précédent, en

$$-\int_h^0 dt.f'(x+h-t), \quad \text{ou} \quad \int_0^h dt.f'(x+h-t);$$

en sorte qu'on peut écrire

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^h dt.f'(x+h-t).$$

Cela posé, considérons l'intégrale indéfinie

$$\int dt.f'(x+h-t):$$

en lui appliquant le procédé de l'intégration par parties, on trouvera successivement

$$\int dt.f'(x+h-t)=t.f'(x+h-t)+\int dt.t.f''(x+h-t),$$

$$\int dt.tf''(x+h-t)=\frac{t^2}{2}.f''(x+h-t)+\int dt.\frac{t^2}{2}.f'''(x+h-t),$$

$$\int dt.\frac{t^2}{2}f'''(x+h-t)=\frac{t^3}{2.3}.f'''(x+h-t)+\int dt.\frac{t^3}{2.3}.f^4(x+h-t),$$

etc.

nséquent

$$h-t)=t.f'(x+h-t)+\frac{t^2}{2}f''(x+h-t)+\frac{t^3}{2.3}f'''(x+h-t)+\ldots\ldots$$
$$\frac{t^{\mu-1}}{.4\ldots(\mu-1)}f^{\mu-1}(x+h-t)+\int dt.\frac{t^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)}f^{\mu}(x+h-t).$$

n prenant l'intégrale entre les limites zéro et h,

$$''(x+h-t)=hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\frac{h^4}{2.3.4}f^4(x)+\ldots\ldots$$
$$\frac{h^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)}f^{\mu-1}(x)+\int_0^h dt.\frac{t^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)}f^{\mu}(x+h-t),$$

ıbstituant cette valeur dans l'équation précédente, il

$$)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\frac{h^4}{2.3.4}f^4(x)+\ldots\ldots,$$
$$\frac{h^{\mu-1}}{.3.4\ldots(\mu-1)}f^{\mu-1}(x)+\int_0^h dt.\frac{t^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)}f^{\mu}(x+h-t).$$

ɔn fait dans cette équation $x=0$, puis que l'on écrive place de h, elle prendra la forme

$$)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{2.3}f'''(0)+\frac{x^4}{2.3.4}f^4(0)+\ldots\ldots$$
$$\frac{x^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)}f^{\mu-1}(0)+\int_0^x dt.\frac{t^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)}f^{\mu}(x-t).$$

ıisé de reconnaître d'ailleurs que cette nouvelle expres-
lu terme complémentaire de la série de Taylor com-
celle qui a été présentée dans les n°s 85 et 86. Mais
que celle-ci est indéterminée, et fait seulement con-
les limites entre lesquelles la valeur du terme dont il

s'agit est contenue, l'expression sous forme d'intégrale définie détermine complétement cette valeur.

XXIX. USAGE DES INTÉGRALES DÉFINIES POUR L'ÉVALUATION DES LONGUEURS DES COURBES, DES AIRES ET DES VOLUMES.

1° Aires des courbes planes.

309. Considérons une courbe quelconque rapportée à deux axes rectangulaires. Proposons-nous de trouver l'aire de cette courbe, c'est-à-dire la valeur numérique de la surface comprise entre l'axe, la courbe et deux ordonnées quelconques. Désignons par

$$y = f(x)$$

l'équation de la courbe, et par x_0, x_ω les abscisses qui répondent aux ordonnées par lesquelles l'aire qu'il s'agit d'évaluer est limitée. On a trouvé dans le n° 156 qu'en désignant par u la fonction de x qui représentait la valeur de l'aire comptée d'une origine quelconque jusqu'à l'ordonnée correspondante à l'abscisse x, la différentielle de cette fonction était exprimée par

$$du = ydx.$$

Or l'aire qu'il s'agit d'évaluer est évidemment la somme des valeurs en nombre infini que prend la différentielle du lorsqu'on donne à x dans cette différentielle toutes ses valeurs comprises entre x_0 et x_ω. Donc, conformément à ce qu'on a vu dans l'article précédent, cette aire est exprimée par l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, y.$$

ntendu que dans cette expression les limites x_0 et deux nombres donnés correspondants aux positions onnées qui terminent l'aire. Le résultat de l'opération e par l'expression analytique dont il s'agit est égale- n nombre déterminé, représentant la valeur de cette

on peut aussi imaginer que la première limite x_0 est onnée et fixe, et que la seconde limite x_ω est indéter- et arbitraire. Alors on représentera simplement cette e limite par x. Le résultat de l'intégration définie sera me fonction de x représentant l'aire qui commence à née correspondante à l'abscisse x_0, et qui se termine à tre ordonnée quelconque correspondante à l'abscisse x. signant cette aire par u, nous écrirons donc

$$u = \int_{x_0}^{x} dx \,.\, y.$$

). Si la courbe proposée est rapportée à des coordonnées es, son équation sera donnée sous la forme

$$r = f(\omega),$$

signant l'angle compris entre le rayon vecteur dont la leur est r et une ligne fixe. L'aire u est ici l'espace trian- ire compris entre la courbe et deux rayons vecteurs for- t avec l'axe fixe, l'un l'angle ω_0, l'autre l'angle quel- que ω. Comme on a trouvé dans le n° 199

$$du = \frac{1}{2} r^2 d\omega,$$

aura donc ici

$$u = \frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \,.\, r^2.$$

311. Soit, par exemple, l'ellipse rapportée à ses diamètres rectangulaires, dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{ou} \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

a et b désignant les demi-diamètres oA et oB (fig. 45). L'aire $oBmp$ sera exprimée d'après le n° 309 par

$$u=\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2-x^2},$$

x désignant l'abscisse op. Pour obtenir la valeur de cette intégrale définie, il faut considérer l'intégrale indéfinie $\int dx\sqrt{a^2-x^2}$. On pourrait la rendre rationnelle en employant la tranformation indiquée n° 276. Il serait plus simple de la mettre sous la forme $\int dx\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$, et de considérer à part les deux parties $\int\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, dont la première s'intègre immédiatement d'après le n° 281, et dont la seconde s'intégrerait en la considérant comme une différentielle binôme, et opérant d'une manière semblable à ce qu'on a fait n° 287. Mais il sera plus simple encore de poser

$$\sqrt{a^2-x^2}=tx, \quad \text{d'où} \quad x^2=\frac{a^2}{1+t^2}.$$

t désignant une nouvelle variable; ce qui donne

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=\int t.xdx=\frac{1}{2}tx^2-\frac{1}{2}\int dt.x^2=\frac{1}{2}tx^2-\frac{a^2}{2}\int\frac{dt}{1+t^2};$$

par conséquent

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=C+\frac{1}{2}tx^2-\frac{a^2}{2}\text{arc tang.}t,$$

$$x\sqrt{a^2-x^2}=C+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}a^2.\text{arc tang.}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x};$$

n prenant l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=x$,

$$dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\text{arc tang.}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2.\text{arc tang.}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2.\text{arc sin.}\frac{x}{a}.$$

pression de l'aire demandée est donc

$$u=\frac{bx}{2a}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{ab}{2}\text{arc sin.}\frac{x}{a}$$
$$=\frac{xy}{2}+\frac{ab}{2}\text{arc sin.}\frac{x}{a}.$$

nme $\frac{xy}{2}$ est l'aire du triangle omp, on voit que l'aire secteur oBm est $\frac{ab}{2}$ arc sin. $\frac{x}{a}$. En faisant $x=a$, on aura pour l'aire oBA, et par conséquent πab pour l'aire entière l'ellipse.

312. Soit l'hyperbole rapportée à ses axes dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{ou} \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

En désignant par u l'aire Apm (*fig.* 46), op représentant l'abscisse x, on aura

$$u=\frac{b}{a}\int_a^x dx\sqrt{x^2-a^2}.$$

Pour obtenir l'intégrale indéfinie $\int dx\sqrt{x^2-a^2}$, on fera comme ci-dessus,

$$\sqrt{x^2-a^2}=tx, \qquad \text{d'où} \qquad x^2=\frac{a^2}{1-t^2},$$

et

$$\int dx\sqrt{x^2-a^2}=\int t.xdx=\frac{1}{2}tx^2-\frac{1}{2}\int dt.x^2=\frac{1}{2}tx^2-\frac{a^2}{2}\int\frac{dt}{1-t^2}.$$

Mais

$$\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int dt\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right):$$

donc

$$\int dx\sqrt{x^2-a^2}=C+\frac{1}{2}tx^2+\frac{a^2}{4}.l\frac{1-t}{1+t},$$

ou

$$\int dx\sqrt{x^2-a^2}=C+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{4}.l\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$=C+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}.l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right);$$

et en prenant l'intégrale depuis $x=a$ jusqu'à $x=x$, il vient

$$\int_a^x dx\sqrt{x^2-a^2}=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}.l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

L'expression de l'aire Amp dont il s'agit est donc

$$u = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2} \cdot l\frac{x + \sqrt{x^2 \quad a^2}}{a}$$
$$= \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \cdot l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

ne $\frac{xy}{2}$ représente l'aire du triangle *omp*, on voit que

du secteur *om*A est représentée par $\frac{ab}{2} \cdot l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$. Cette

devient infinie lorsque le point *m* s'éloignant à l'infini le

n *om* se confond avec l'asymptote.

13. L'équation de l'hyperbole équilatère rapportée à ses

nptotes étant

$$xy = \frac{a^2}{2} \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{a^2}{2x},$$

re représentée par u, comprise entre les ordonnées cor-

pondantes aux abscisses x_0, x, est exprimée par

$$u = \frac{a^2}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} \qquad \text{ou} \qquad u = \frac{a^2}{2} \cdot l\frac{x}{x_0}.$$

l'on pose $a = 1$, on a simplement

$$u = \frac{1}{2} \cdot l\frac{x}{x_0}:$$

insi les logarithmes népériens des nombres donnent immé-

iatement les aires de l'hyperbole équilatère. C'est par cette

aison que ces logarithmes ont été nommés *logarithmes hy-*

perboliques.

314. L'équation de la parabole, en comptant les ordon-

nées du sommet, est

$$y^2 = 2px \qquad \text{ou} \qquad y = \sqrt{2px}.$$

L'aire *omp* (*fig.* 47) est donc représentée par

$$u = \sqrt{2p} \int_0^x dx \sqrt{x},$$

qui revient à

$$u = \frac{2}{3} \sqrt{2p} . x^{\frac{3}{2}}, \qquad \text{ou} \qquad u = \frac{2}{3} xy.$$

L'aire *omp* est donc les $\frac{2}{3}$ du rectangle *ormp*, et l'aire *omr* en est le $\frac{1}{3}$.

315. Si l'on considère la courbe dont l'ordonnée est

$$y = a^x,$$

a désignant une constante positive, et plus grande que l'unité, l'expression de l'aire *mpqn* (*fig.* 48) représentée par *u*, et terminée aux abscisses *op* et *oq*, représentées par x_0 et x, sera

$$u = \int_{x_0}^{x} dx . a^x;$$

et comme on a l'intégrale indéfinie $\int dx . a^x = \frac{a^x}{la}$, il viendra

$$u = \frac{a^x - a^{x_0}}{la}.$$

L'aire comptée à partir de *o*B du côté des x positives sera donc $\frac{a^x - 1}{la}$, et l'aire comptée à partir de *o*B du côté des x négatives sera $\frac{1 - a^{-x}}{la}$. Cette dernière expression donne, en

ınt $x = \frac{1}{0}$, $\frac{1}{la}$ pour l'aire comprise entre l'axe et la prolongée à l'infini.

Dans la cycloïde (*fig.* 49), les coordonnées *op*, *mp* ›int quelconque de la courbe étant représentées par ›n a, comme on l'a vu n° 178,

$$x = R(\omega - \sin.\omega), \qquad y = R^2(1 - \cos.\omega),$$

;nant le rayon *cr* du cercle générateur, et ω l'angle 'aire *omp* sera exprimée par

$$u = \int_0^x y dx \quad \text{ou} \quad u = R^2 \int_0^\omega d\omega (1 - \cos.\omega)^2.$$

n a

$$(1 - \cos.\omega)^2 = \int d\omega (1 - 2\cos.\omega + \cos.^2\omega) = \int d\omega \left(\frac{3}{2} - 2\cos.\omega + \frac{1}{2}\cos.2\omega\right)$$
$$= \frac{3}{2}\omega - 2\sin.\omega + \frac{1}{4}\sin.2\omega.$$

$$u = R^2\left(\frac{3}{2}\omega - 2\sin.\omega + \frac{1}{4}\sin.2\omega\right).$$

formule donnera la totalité de l'aire *omna*, comprise la première partie de la cycloïde et l'axe *oa*, en y fai- $\omega = 2\pi$. La valeur de cette aire est donc $3\pi R^2$, c'est-à- e triple de l'aire du cercle générateur.

peut remarquer d'ailleurs que l'aire

$$oqtm = oqtp - omp = 2Rx - u$$
$$= \frac{R^2}{2}(\omega - \sin.\omega \cos.\omega):$$

donc l'espace *oqtm* est égal à la partie *rms* du cercle générateur, et par conséquent l'espace *oqtnm* est égal à la moitié du cercle générateur.

317. On pourra toujours, au moyen de l'opération qui vient d'être expliquée, évaluer une aire quelconque comprise dans un contour tracé sur un plan. Car soit Mm_1Nm_2 (*fig.* 50) le contour dont il s'agit, rapporté à des coordonnées rectangulaires. Désignons par x_0, x_ω les abscisses extrêmes oP, oQ; par x un abscisse quelconque op, et par y_1 et y_2 les ordonnées m_1p et m_2p correspondantes à cette abscisse, et appartenant respectivement aux deux courbes Mm_1N et Mm_2N qui forment le contour. Ces ordonnées doivent être données en fonctions de x, et il est visible d'après ce qui précède que l'aire Mm_1Nm_2 est exprimée par l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx(y_2 - y_1).$$

Si le contour Mm_1Nm_2 est discontinu, et composé de parties distinctes, dont les ordonnées ne soient pas exprimées par une même fonction de l'abscisse x, on pourra partager l'aire proposée, et l'intégrale définie qui en exprime la valeur, en plusieurs parties correspondantes respectivement aux portions du contour dont les ordonnées ont une expression commune. La valeur de chacune de ces parties se calculera séparément. Dans les cas mêmes où les ordonnées du contour ne sont pas données par une ou plusieurs expressions analytiques formées de l'abscisse x, mais où l'on connaît seulement les valeurs numériques des ordonnées de certains points de ce contour, il existe, comme on le verra dans la suite, des méthodes au moyen desquelles on peut évaluer approximativement l'intégrale définie par laquelle l'aire est représentée.

'our présenter une application de la formule du nous considérerons la spirale logarithmique dont l'é- donnée n° 204 est

$$r = e^{la \cdot \omega}.$$

iangulaire comprise entre la courbe et les deux rayons r et r_0 qui forment entre eux l'angle $\omega - \omega_0$ sera

$$u = \frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \cdot e^{2la \cdot \omega},$$

lire

$$u = \frac{e^{2la \cdot \omega} - e^{2la \cdot \omega_0}}{4 \cdot la}, \quad \text{ou} \quad u = \frac{r^2 - r_0^2}{4 \cdot la}.$$

s cas particuliers où $la = 1$, et $r = e^{\omega}$, l'aire dont il st donc le $\frac{1}{4}$ de la différence des carrés construits sur x rayons vecteurs.

2° Longueurs des courbes planes.

. En appliquant ici les considérations qui ont été pré- s dans le n° 309, et se rappelant que l'on a trouvé dans 57 que la différentielle de l'arc d'une courbe rapportée oordonnnées rectangulaires x, y, et représentée par tion

$$y = f(x),$$

exprimée par

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

on aura évidemment l'intégrale définie

$$s=\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

pour l'expression générale de la longueur de l'arc de la courbe compris entre les points correspondants aux abscisses x_0 et x.

320. De même, si la courbe est rapportée à des coordonnées polaires, et représentée par l'équation

$$r=f(\omega);$$

comme on a trouvé dans le n° 200,

$$ds=d\omega\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}$$

pour l'expression de la différentielle de l'arc, on aura

$$s=\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2},$$

pour l'expression générale de la longueur de l'arc de la courbe compris entre les points correspondants aux valeurs ω_0 et ω de l'angle qui détermine la direction du rayon vecteur.

321. Si l'on considère, par exemple, comme dans le n° 312, l'ellipse rapportée à ses diamètres rectangulaires, dont l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ donne } y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ \frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

il viendra

$$dx\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}},$$

pression de l'arc compté du sommet de la courbe point dont l'abscisse est x. En introduisant l'excen- ignée par e dans le n° 197, ou faisant $a^2-b^2=a^2e^2$, ression s'écrira

$$s=\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}.$$

it pas l'obtenir sous forme finie, mais on peut la r en série convergente de diverses manières. Re- par exemple, que $\frac{x}{a}$ est toujours une fraction, poser $x=a\cos.\varphi$, d'où $dx=-a\sin.\varphi d\varphi$,

$$s=-a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi\sqrt{1-e^2\cos.^2\varphi};$$

eloppant $(1-e^2\cos.^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$;

$$s\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi\left(\frac{e^2}{2}\cos.^2\varphi+\frac{1}{2}\frac{e^4}{4}\cos.^4\varphi\right.$$

$$\left.\frac{1.3}{2.4}\frac{e^6}{6}\cos.^6\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{e^8}{8}\cos.^8\varphi+\text{etc.}\right).$$

ar la seconde des formules écrites n° 294,

$$=\frac{1}{2}\sin.\varphi.\cos.\varphi+\frac{1}{2}\varphi+C,$$

$$=\frac{1}{4}\sin.\varphi.\cos.^3\varphi+\frac{1.3}{2.4}\sin.\varphi.\cos.\varphi+\frac{1.3}{2.4}\varphi+C,$$

$$\int d\varphi.\cos.^6\varphi = \frac{1}{6}\sin.\varphi.\cos.^5\varphi + \frac{1.5}{4.6}\sin.\varphi.\cos.^3\varphi$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\sin.\varphi.\cos.\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi + C,$$

$$\int d\varphi.\cos.^8\varphi = \frac{1}{8}\sin.\varphi.\cos.^7\varphi + \frac{1.7}{6.8}\sin.\varphi.\cos.^5\varphi + \frac{1.5.7}{4.6.8}\sin.\varphi.\cos.^3\varphi$$
$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin.\varphi.\cos.\varphi + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varphi + C,$$

etc.;

et en prenant les intégrales depuis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\varphi = \varphi$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi.\cos.^2\varphi = \frac{1}{2}\sin.\varphi.\cos.\varphi - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi.\cos.^4\varphi = \frac{1}{4}\sin.\varphi.\cos.^3\varphi + \frac{1.3}{2.4}\sin.\varphi.\cos.\varphi - \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi.\cos.^6\varphi = \frac{1}{6}\sin.\varphi.\cos.^5\varphi + \frac{1.5}{4.6}\sin.\varphi.\cos.^3\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin.\varphi.\cos.\varphi$$
$$-\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi.\cos.^8\varphi = \frac{1}{8}\sin.\varphi.\cos.^7\varphi + \frac{1.7}{6.8}\sin.\varphi.\cos.^5\varphi + \frac{1.5.7}{4.6.8}\sin.\varphi.\cos.^3\varphi$$
$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin.\varphi.\cos.\varphi - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

etc.;

ce qui donne les valeurs de chaque terme de la série précédente.

Si l'on suppose $x = a$, et par conséquent $\cos.\varphi = 1$ ou $\varphi = 0$, l'expression précédente de s donnera pour la longueur du quart du contour de l'ellipse :

$$1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2-\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)^2-\text{etc.}$$

322. L'équation de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{donne} \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\ \frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

par conséquent

$$=\int_a^x dx\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{x^2-a^2}}=\int_a^x dx\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2+a^4}{a^2(x^2-a^2)}};$$

, en faisant $a^2+b^2=a^2e^2$,

$$s=\int_a^x dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}$$

ur l'expression de l'arc compté du sommet de la courbe squ'au point dont l'abscisse est x. Comme ici x est tourours $>a$, nous poserons $x=\frac{a}{\cos.\varphi}$, d'où $dx=\frac{a\sin.\varphi d\varphi}{\cos.^2\varphi}$,

$$s=a\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi}\sqrt{e^2-\cos.^2\varphi}=a\int_0^\varphi dx\frac{e}{\cos.^2\varphi}\sqrt{1-\frac{\cos.^2\varphi}{e^2}},$$

u, en développant $\left(1-\frac{\cos.^2\varphi}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$=a\int_0^\varphi d\varphi\cdot\frac{e}{\cos.^2\varphi}\left(1-\frac{1}{2e^2}\cos.^2\varphi-\frac{1}{2}\frac{1}{4e^4}\cos.^4\varphi-\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6e^6}\cos.^6\varphi\right.$$
$$\left.-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8e^8}\cos.^8\varphi-\text{etc.}\right),$$

ou enfin

$$s = ae.\text{tang.}\varphi - \frac{a}{2e}\varphi - a\int_0^\varphi d\varphi\left(\frac{1}{2}\frac{1}{4e^3}\cos.^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6e^5}\cos.^4\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8e^7}\cos.^6\varphi + \text{etc.}\right).$$

Les termes de la série seront donnés par les expressions de $\int d\varphi.\cos.^2\varphi$, $\int d\varphi.\cos.^4\varphi$, etc., du numéro précédent, en supposant la constante arbitraire C égale à zéro.

Remarquons que l'équation de l'asymptote étant $y = \frac{b}{a}x$, la distance du centre de la courbe au point de l'asymptote dont l'abscisse est x, est $\frac{\sqrt{a^2+b^2}.x}{a} = ex = \frac{ae}{\cos.\varphi}$. Soit r cette distance : on aura

$$r - s = ae\frac{1-\sin.\varphi}{\cos.\varphi} + \frac{a}{2e}\varphi + a\int_0^\varphi d\varphi\left(\frac{1}{2}\frac{1}{4e^3}\cos.^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6e^5}\cos.^4\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8e^7}\cos.^6\varphi + \text{etc.}\right).$$

Si l'on suppose $x = \frac{1}{0}$, et par conséquent $\cos.\varphi = 0$ ou $\varphi = \frac{\pi}{2}$, cette dernière formule donnera pour la limite vers laquelle tend l'excès de r sur s, à mesure que l'abscisse x devient de plus en plus grande $\left(\text{en remarquant que } \frac{1-\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = \frac{\cos.\varphi}{1+\sin.\varphi} = 0 \text{ lorsque } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\frac{\pi a}{4e}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{e^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{e^3}\right)^2 + \text{etc.}\right].$$

on de la parabole

; donne $y=\sqrt{2px}$, $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{p}{2x}}$.

ıpris entre le sommet de la courbe et le point
scisse a pour expression,

$$s=\int_0^x dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}}.$$

léfinie $\int dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}}$ se trouvera en po-

$\overline{+\frac{p}{2x}}=t$, d'où $x=\frac{p}{2(t^2-1)}$;

$\overline{\frac{p}{2x}}=\int dx.t=xt-\int xdt=xt-\frac{p}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}$.

grale $\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\int dt\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)$

$dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}}=xt-\frac{p}{4}l.\frac{t-1}{t+1}+C$

$\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-\frac{p}{4}.l\frac{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-1}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}+1}+C$;

et en prenant l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=x$, on a

$$s=x\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-\frac{p}{4}.l\frac{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-1}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}+1},$$

ou

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{2px+4x^2}+\frac{1}{4}p.l\frac{4x+p+2\sqrt{2px+4x^2}}{p}.$$

324. Soit maintenant, comme dans le n° 316, la courbe dont l'équation est

$$y=a^x, \quad \text{et donne} \quad \frac{dy}{dx}=la.a^x=la.y;$$

on aura donc

$$s=\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+(la.a^x)^2}$$

pour la longueur de l'arc dont les extrémités correspondent aux abscisses x_0 et x. Pour trouver la valeur de cette intégrale définie, nous poserons

$$\frac{dy}{dx}=la.y=\text{tang.}\tau, \quad \text{d'où} \quad la.dy=\frac{d\tau}{\cos.^2\tau}, \; dx=\frac{1}{la}\frac{dy}{y}$$
$$=\frac{1}{la}\frac{d\tau}{\sin.\tau.\cos.\tau};$$

et

$$s=\frac{1}{la}\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau}{\sin.\tau.\cos.^2\tau}.$$

lais, par la quatrième des formules données n° 293,

$$\int \frac{d\tau}{\sin.\tau.\cos.^2\tau} = \frac{1}{\cos.\tau} + \int \frac{d\tau}{\sin.\tau},$$

t par l'une des formules du n° 295, on trouve

$$\int \frac{d\tau}{\sin.\tau} = l.\text{tang.}\frac{\tau}{2} + C.$$

onc

$$s = \frac{1}{la}\left(\frac{1}{\cos.\tau} - \frac{1}{\cos.\tau_0} + l\frac{\text{tang.}\frac{\tau}{2}}{\text{tang.}\frac{\tau_0}{2}}\right).$$

l est sans doute superflu de remarquer que τ = arc tang. $(la.y)$ st ici l'angle formé avec l'axe des x par la tangente menée la courbe au point dont l'abscisse est x.

325. Soit encore, comme au n° 316, la cycloïde dont 'équation a été donnée n° 179 (*fig.* 49). On aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2Ry - y^2}}{y}, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2Ry - y^2}}.$$

r la différentielle $dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ de l'arc d'une courbe ouvant également s'exprimer par $dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, nous ouvons représenter ici par

$$s = \int_0^y dy\sqrt{1 + \frac{y^2}{2Ry - y^2}} = \sqrt{2R}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{2R - y}},$$

la longueur de l'arc compris entre l'origine de la courbe et le point dont l'ordonnée est y. Et comme on a

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2R-y}} = -2\sqrt{2R-y} + C,$$

il vient

$$s = 4R - 2\sqrt{2R}\sqrt{2R-y}.$$

Cette formule donnera la longueur de la moitié de la courbe en y faisant $y = 2R$. Cette moitié est donc égale à $4R$, comme on l'a déjà remarqué n° 191. Si d'ailleurs on voulait compter l'ordonnée y de haut en bas, à partir de la ligne nq, et l'arc s à partir du point n dans le sens nmo, on devrait écrire $2R - y$ à la place de y et $4R - s$ à la place de s, ce qui donnerait

$$s = 2\sqrt{2Ry}.$$

326. Nous considérerons enfin la spirale logarithmique dont l'équation, rapportée aux coordonnées polaires, est

$$r = e^{la.\omega}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dr}{d\omega} = la.e^{la.\omega} = la.r.$$

Il viendra, d'après ce qui a été dit n° 320,

$$s = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \sqrt{r^2 + (la)^2.r^2} = \sqrt{1+(la)^2} \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega.e^{la.\omega},$$

c'est-à-dire

$$s = \frac{\sqrt{1+(la)^2}}{la}(r - r_0),$$

ıeur de l'arc compris entre les points de la
els appartiennent les rayons vecteurs r_0 et r.
le compris entre la normale et la courbe a
e trigonométrique, d'après le n° 204, $-la$,
ris entre la tangente et la courbe a pour tan-
ométrique $\frac{1}{la}$, et pour cosinus $\frac{la}{\sqrt{1+(la)^2}}$. Il
en effet, par la nature de la courbe dont il
la différence de deux rayons vecteurs est à la
ɜ l'arc qu'ils comprennent dans un rapport con-
ıné par ce cosinus.

l'équation de la spirale logarithmique est sim-
$= e^{\omega}$, on a $s = \sqrt{2}(r - r_0)$. La longueur de l'arc
ıtre deux points quelconques de la courbe est la
des diagonales des carrés construits sur les rayons
ıppartenant à ces points.

3° Longueurs des courbes à double courbure.

Jne courbe à double courbure étant donnée par les
ıs

$$y = f(x), \qquad z = F(x),$$

ouvé dans le n° 227, pour l'expression générale de
rentielle de cette courbe,

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

ɜs les principes établis au commencement de cet article,
ra donc

$$s = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

pour l'expression de la longueur de l'arc de la courbe dont les deux extrémités répondent aux abscisses x_0 et x.

328. Soit, par exemple, l'hélice représentée par les équations

$$x = \mathrm{R}\cos.\omega, \qquad y = \mathrm{R}\sin.\omega, \qquad z = a\mathrm{R}\omega,$$

qui donnent

$$dx = -\mathrm{R}\sin.\omega.d\omega, \quad dy = \mathrm{R}\cos.\omega.d\omega, \quad dz = a\mathrm{R}d\omega.$$

L'expression précédente prendra la forme

$$s = \mathrm{R}\sqrt{1 + a^2} \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \mathrm{R}\sqrt{1 + a^2}(\omega - \omega_0),$$

résultat qu'il est aisé de prévoir d'après la nature de la courbe.

4° Volumes des solides de révolution.

329. Supposons que l'axe d'un solide de révolution coïncide avec l'axe des x, et représentons par

$$y = f(x)$$

l'équation de la courbe plane dont la révolution autour de cet axe décrit la surface du solide. Désignons par v la partie du volume du solide comprise entre deux plans menés perpendiculairement à l'axe ox (*fig.* 51) par les points

ıt décrite par la révolution de la partie PM*mp*
a courbe génératrice. Soit x l'abscisse *op*. Il
ɜ quand x augmentera de Δx représentée sur
· *pq*, le volume v augmentera d'une quan-
au volume décrit par la révolution de l'aire
ɜ volume (en supposant Δx assez petite pour
constamment croissante ou décroissante dans
ıq) est compris entre ceux des deux cylindres
nauteur commune *pq*, et pour rayons *pm* et *qn*.

$$\Delta v > \pi y^2 . \Delta x , \qquad \Delta v < \pi (y + \Delta y)^2 . \Delta x ;$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} > \pi y^2 , \qquad \frac{\Delta v}{\Delta x} < \pi (y + \Delta y)^2 ;$$

e ces deux expressions ont pour limite commune,
Δx devient de plus en plus petite, πy^2, nous devons
ıure

$$\frac{dv}{dx} = \pi y^2 , \qquad \text{ou} \qquad dv = \pi y^2 . dx.$$

'expression générale de la différentielle du volume re-
ıté par v.
près cela l'on reconnaît immédiatement que l'intégrale
e

$$v = \pi \int_{x_0}^{x} dx . y^2 ,$$

ıe l'expression de la partie du volume d'un solide de

révolution qui est comprise entre deux plans menés perpendiculairement à l'axe aux distances x_0 et x de l'origine des coordonnées.

330. Soit par exemple l'ellipsoïde de révolution dont l'axe de révolution est $2a$, et dont l'axe perpendiculaire à celui-ci est $2b$. L'équation de la courbe génératrice, en comptant les x du centre, est

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Donc

$$v = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^x dx(a^2 - x^2)$$

représente la partie du volume du corps comprise entre le plan perpendiculaire à l'axe qui passe par le centre et le plan mené à la distance x de celui-ci. Cette formule donne d'ailleurs

$$v = \pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right).$$

En faisant $x = a$, on aura $\frac{2\pi}{3} ab^2$ pour le volume de la moitié de l'ellipsoïde de révolution. Le volume entier de ce corps est donc $\frac{4\pi}{3} ab^2$.

331. On calculera facilement, d'après ce qui précède, le volume de tout solide décrit par la révolution d'une figure plane quelconque autour d'un axe pris dans le plan de cette figure. Le volume du solide décrit par la révolution de l'aire Mm_1Nm_2 (*fig.* 52) tracée dans le plan des xy

des x, est exprimé par l'intégrale définie

$$\pi \int_{x_0}^{x_\omega} dx(y_2^2 - y_1^2),$$

ésentant la plus petite valeur oP et la plus
)Q de l'abscisse x, et y_1, y_2 les valeurs des
, m_2p des deux lignes Mm_1N, Mm_2N qui ré-
abscisse quelconque x.

Aires des surfaces de révolution.

rons la surface décrite par une courbe plane
dont l'équation est

$$y = f(x),$$

courbe tourne autour de l'axe ox (*fig.* 51).
u l'aire de la partie de cette surface décrite
on de la partie Mm de la courbe. Soit x
orsque x augmentera de l'intervalle infini-
représenté sur la figure par pq, l'aire u
l'aire décrite par la révolution de l'élément
la courbe étant regardée comme coïncidant
te dans l'étendue de cet élément, l'accroisse-
t il s'agit sera regardé comme égal à la sur-
tronqué dont pq est la hauteur et dont mp
ayons des deux bases. Donc

$$du = \pi(2y + dy)ds,$$

nt les quantités infiniment petites du second

ordre

$$du = 2\pi y \,.\, ds \quad \text{ou} \quad du = 2\pi \,.\, dx \,.\, y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ainsi nous aurons

$$u = 2\pi \int_{x_0}^{x} dx \,.\, y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

pour l'expression de l'aire de la surface de révolution qui est comprise entre deux plans menés perpendiculairement à l'axe aux distances x_0 et x de l'origine des coordonnées.

333. Soit encore pris pour exemple l'ellipsoïde de révolution considéré dans le numéro 330. L'équation de la courbe génératrice donnant

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

il viendra

$$u = 2\pi \frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2},$$

pour l'expression de l'aire de la partie de la surface comprise entre le plan perpendiculaire à l'axe qui passe par le centre et un autre plan mené à la distance x de celui-ci. Supposons d'abord $a > b$, c'est-à-dire que l'ellipse a tourné autour de son grand axe, et posons $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$; cette expression deviendra

$$u = 2\pi \frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2 - e^2x^2};$$

it

$$u = 2\pi \frac{b}{ae} \int_0^x e dx \sqrt{a^2 - e^2 x^2},$$

par le numéro 311,

$$2\pi \frac{b}{ae} \left(\frac{1}{2} ex \sqrt{a^2 - e^2 x^2} + \frac{1}{2} a^2 . \text{arc sin.} \frac{ex}{a} \right)$$

$$= \pi b \left(x \sqrt{1 - \frac{e^2 x^2}{a^2}} + \frac{a}{e} . \text{arc sin.} \frac{ex}{a} \right).$$

$= a$, il viendra

$$\pi ab \left(\sqrt{1 - e^2} + \frac{1}{e} \text{arc sin.} e \right),$$

$$\pi \left(b^2 + \frac{ab}{e} \text{arc sin.} e \right),$$

la moitié de la surface de l'ellipsoïde.

en second lieu $a < b$, c'est-à-dire que l'el-
autour de son petit axe. En désignant tou-
xcentricité, on posera donc $\frac{b^2 - a^2}{b^2} = e^2$, et il

$$u = 2\pi \frac{b}{a} \int_0^x dx \sqrt{a^2 + \frac{b^2 e^2 x^2}{a^2}},$$

ire

$$u = \frac{2\pi}{e} \int_0^x \frac{be.dx}{a} \sqrt{a^2 + \frac{b^2 e^2 x^2}{a^2}}.$$

On trouvera d'ailleurs, comme dans le numéro 312, l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{be.dx}{a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}=C+\frac{bex}{2a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}$$
$$+\frac{a^2}{2}.l\left(\frac{bex}{a}+\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}\right),$$

et en prenant l'intégrale de $x=0$ à $x=x$,

$$\int_0^x \frac{be.dx}{a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}=\frac{bex}{2a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}$$
$$+\frac{a^2}{2}.l\frac{\frac{bxe}{a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}}{a}.$$

Donc

$$u=\pi\left[\frac{bx}{a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}+\frac{a^2}{e}.l\frac{\frac{bex}{a}+\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}}{a}\right]$$
$$=\pi b\left[x\sqrt{1+\frac{b^2e^2x^2}{a^4}}+\frac{a^2}{be}.l\left(\frac{bex}{a^2}+\sqrt{1+\frac{b^2e^2x^2}{a^4}}\right)\right].$$

En faisant $x=a$, il viendra

$$\pi ab\left[\sqrt{1+\frac{b^2e^2}{a^2}}+\frac{a}{be}.l\left(\frac{be}{a}+\sqrt{1+\frac{b^2e^2}{a^2}}\right)\right],$$

ou

$$\pi\left[b^2+\frac{a^2}{e}.l(1+e)\frac{b}{a}\right],$$

pour l'aire de la moitié de la surface de l'ellipsoïde.

ı pourra calculer, d'après ce qui précède, l'aire ıce d'un solide de révolution décrit par une courbe lconque tournant autour d'un axe tracé dans le ette courbe. En conservant ici les dénominations ı 331, l'aire de la surface décrite par la révolution be Mm_1Nm_2 (*fig.* 52) autour de l'axe ox, sera ıt représentée par l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left[y_1\sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2}+y_2\sqrt{1+\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2}\right].$$

Volumes des solides d'une figure quelconque.

un solide dont la surface rapportée aux coor- tangulaires x, y, z, est représentée par l'équa-

$$z=f(x,y):$$

ra de la manière la plus générale la question on du volume de ce solide si, ayant tracé sur xy (*fig.* 52) un contour quelconque Mm_1Nm_2, le volume compris entre le plan des xy, la sur- ı, et le cylindre dont le contour Mm_1Nm_2 est la les arêtes sont parallèles à l'axe des z. Nous s par x_0 et x_ω les abscisses extrêmes oP et ne Mm_1Nm_2; par y_1 et y_2 les ordonnées m_1p épondent à l'abscisse op représentée par x, et nent respectivement aux branches Mm_1N et e ligne. Les quantités y_1 et y_2 seront des fonc- de l'abscisse x.

considérons la partie du volume demandé dont

la base sur le plan des xy est Mm_1m_2, et désignons par v sa valeur, qui sera une fonction de x. Lorsque l'abscisse op, ou x, augmentera de la quantité infiniment petite dx représentée sur la figure par pq, le volume v augmentera d'une partie également infiniment petite, dont la base sur le plan des xy est $m_1n_1n_2m_2$. Donc cette partie représente la différentielle dv. Et il résulte des notions présentées au commencement de cet article que l'on a

$$v=\int_{x_0}^{x} dv,$$

et que le volume entier dont le contour Mm_1Nm_2 est la base est exprimé par

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dv.$$

Il s'agit maintenant d'exprimer analytiquement cette différentielle dv, c'est-à-dire la partie infiniment petite du volume demandé, dont la base est $m_1n_1n_2m_2$, partie qui n'est autre chose que la tranche de ce volume comprise entre deux plans menés parallèlement au plan des yz, aux distances x et $x+dx$ de ce plan. Considérons un point quelconque m pris sur la ligne m_1m_2 : soit y l'ordonnée mp de ce point : $z=f(x, y)$ représentera l'ordonnée de la surface par laquelle le corps est terminé, qui répond au point m. D'ailleurs, considérons la partie $m_1n_1\nu m$ de la tranche qu'il s'agit d'évaluer, partie qui est évidemment une fonction de l'ordonnée mp, ou y. Il est visible que quand y croîtra de la quantité infiniment petite dy représentée sur la figure par $m\mu$, la partie $m_1n_1\nu m$ de la tranche dont il s'agit croîtra d'une portion de volume infiniment

econd ordre, dont la base est le rectangle $m\nu n\mu$. lume dont il s'agit est évidemment compris entre nes rectangulaires dont la base commune est it l'un a pour hauteur la plus petite des ordon- pondent aux quatre points m, ν, n, μ, et l'autre iteur la plus grande de ces ordonnées. Et comme auteurs ne diffèrent de l'ordonnée z du point m quantité infiniment petite, on doit les regarder iles à z, par conséquent prendre le produit our l'expression de l'accroissement que subit e la tranche dont la base est $m_1 n_1 \nu m$, lorsque y le dy. Nous regarderons donc cette tranche omme d'un nombre infini de différentielles ex- $dx.dy.z$, expression dans laquelle dx est un tant et commun. Il en résultera que si l'on grale $dx \int dy.z$ entre deux limites correspon- oints m_1 et m_2, c'est-à-dire depuis $y = y_1$ jus- on aura un résultat qui ne différera du vo- ranche cherchée que d'une quantité infiniment ond ordre, qui doit être négligée par rapport , qui est infiniment petit du premier ordre. donc

$$dv = dx \int_{y_1}^{y_2} dy.z;$$

ant cette valeur dans l'expression précédente a

$$v = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_1}^{y_2} dy.z,$$

ion générale de la partie du volume demandé

comprise entre des plans menés parallèlement au plan des yz, aux distances x_0 et x de l'origine des coordonnées. On aura, d'après cela,

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_1}^{y_2} dy . z$$

pour l'expression de la totalité de ce volume.

Ces formules sont appelées *intégrales définies doubles* parce qu'elles se rapportent aux deux variables x, y. On en déterminera toujours la valeur au moyen des procédés exposés dans les articles précédents. En effet, après avoir substitué pour z la valeur $f(x, y)$, on prendra par rapport à y l'intégrale indéfinie $\int dy . f(x, y)$, en regardant x comme une constante. Cette intégrale devant être prise entre les limites, y_1, y_2, qui représentent des fonctions données de x, le résultat de l'opération sera une fonction de x seule. Soit $\Phi(x)$ cette fonction : il ne restera plus qu'à prendre l'intégrale $\int_{x_0}^{x} dx . \Phi(x)$.

Remarquons d'ailleurs que l'on ne change rien à la valeur d'une intégrale définie double en intervertissant l'ordre des intégrations successives qui ont lieu par rapport à chacune des variables. On a toujours

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_1}^{y_2} dy . z = \int_{y_0}^{y_\omega} dy \int_{x_1}^{x_2} dx . z;$$

en désignant par x_1 et x_2 les valeurs de x en y, tirées de l'équation de la courbe MN, appartenant respectivement aux deux parties de cette courbe qui limitent l'intégrale dans le sens des x, et par y_0 et y_ω les valeurs extrêmes de l'ordonnée y appartenant à la même courbe. Il est visible,

que l'une ou l'autre de ces expressions donne éga-
a valeur du volume cherché. Mais il ne faut pas
le vue que l'usage des expressions dont il s'agit
en général qu'il n'y ait aucune des valeurs de l'or-
: qui soit infinie dans les limites de l'intégrale. S'il
autrement, on ne pourrait en obtenir la valeur
décomposant en parties distinctes, séparées par
ınées dont il s'agit. Si les valeurs de ces parties sont
s par des nombres infinis et de signes contraires, la
: leur somme, et par conséquent celle de l'intégrale
, est indéterminée.

dmettons maintenant que la surface du solide soit
: à des coordonnées polaires. Nous regarderons la
l'un point quelconque m (*fig.* 53) de cette surface,
tant donnée : 1° par la longueur r du rayon vec-
lirigé sur ce point de l'origine o des coordonnées;
ngle φ que la projection om' de ce rayon vecteur
n des xy forme avec l'axe des x; 3° par l'angle ψ
ème rayon vecteur om forme avec cette projection.
ıs supposerons que la surface du solide est donnée
ıtion

$$r = f(\varphi, \psi).$$

lra d'ailleurs la question dont il s'agit d'une ma-
i générale qu'il est nécessaire, si l'on détermine le
ompris dans un cône ayant pour sommet l'origine
, et pour base une portion quelconque donnée de
du solide. Le contour de cette base doit être dé-
t il le sera si l'on conçoit qu'à une valeur arbi-
ibuée à l'angle φ, répondent deux valeurs ψ_1 et ψ_2
: ψ, qui appartiennent respectivement aux deux

points du contour situés sur la branche inférieure et sur la branche supérieure.

Cela posé, soit un point quelconque m de la surface du solide, déterminé par les coordonnées φ, ψ et r. Supposons que φ augmente de $d\varphi$, représentée sur la figure par l'angle $m'o\mu'$; et que ψ augmente de $d\psi$, représentée sur la figure par l'angle $mo\nu$. Considérons la pyramide dont le sommet est le pôle o, et qui a pour base le rectangle $m\mu n\nu$ dont le plan est perpendiculaire au rayon om. Comme le côté $m\mu$ de cette base est égal à sa projection $m'\mu'$ sur le plan des xy, et comme $o\mu'$ est égal à $r\cos.\psi$, il s'ensuit que ce côté $m\mu = r\cos.\psi.d\varphi$. Le côté $m\nu$ est égal à $r.d\psi$. Donc le volume de cette pyramide est

$$\frac{1}{3} r\cos.\psi.d\varphi.rd\psi.r,$$

ou

$$\frac{1}{3} d\varphi.d\psi.\cos.\psi.r^3;$$

et il est évident qu'il ne diffère que d'un infiniment petit du troisième ordre, du volume compris entre les faces latérales de la même pyramide et la surface du corps.

Donc premièrement, si l'on prend l'intégrale

$$\frac{1}{3} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi.\cos.\psi.r^3,$$

on aura le volume de la tranche du solide comprise entre les deux plans passant par l'axe des z, dont les traces sur le plan des oxy sont m' et $n\mu'$.

ınd lieu, si l'on prend l'intégrale

$$\frac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi . \cos.\psi . r^3,$$

volume de la partie du solide comprise entre
ssant par l'axe des z, qui forment avec le plan
ıgles φ_0 et φ. Par conséquent, si φ_0 et φ_ω sont
et la plus grande valeur de l'angle φ qui appar-
ı base du cône, son volume entier sera repré-

$$\frac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_\omega} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi . \cos.\psi . r^3.$$

le ces intégrales doubles s'obtiendront évidem-
ıanière qui a été expliquée à la fin du numéro

pôle était placé dans l'intérieur du corps, et
exprimer la valeur du volume entier de ce
parviendrait en prenant $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ pour les
ıleurs de l'angle ψ, et 0 et 2π pour celles de
ıi ce volume est représenté par l'expression

$$\frac{1}{3}\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi . \cos.\psi . r^3.$$

'onner une application de ces formules géné-
ellipsoïde rapporté à ses diamètres rectangu-
ʼquation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \text{ou} \quad z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

a, b, c désignant les trois demi-diamètres qui coïncident avec les axes des x, des y et des z. La section de la surface du corps par le plan des xy a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{ou} \quad y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

et cette valeur forme la limite du corps dans le sens des y. Les limites du corps dans le sens des x sont données par les abscisses $x=-a$ et $x=a$. Donc le volume de la moitié de l'ellipsoïde située au-dessus du plan des xy est exprimé par l'intégrale double

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \,.\, c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

ou si l'on veut,

$$\frac{c}{b}\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}}^{\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}} dy\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}-y^2}.$$

Or, on a en premier lieu,

$$\int_{-\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}}^{\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}} dy\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}-y^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}$$

le premier membre représente évidemment l'aire
le dont le rayon est $\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}$. Il reste donc
l'intégrale

$$dx.\frac{\pi}{2}\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\pi bc}{2a^2}\int_{-a}^{a} dx(a^2-x^2),$$

aleur est $\frac{2\pi abc}{3}$; ce qui donne $\frac{4\pi abc}{3}$ pour le vo-
er de l'ellipsoïde.
tte formule donne, conformément aux résultats
par la géométrie, $\frac{4\pi a^3}{3}$ pour le volume de la
nt a désigne le rayon. On obtient le même résultat
nière très-simple par la formule du numéro 337.
'équation de la surface de la sphère étant $r=a$,
ule devient ici

$$\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi.\cos.\psi.$$

os. $\psi = \sin.\psi$, et par conséquent $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi.\cos.\psi = 2.$

prendre l'intégrale $\frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi$, dont la valeur

7° Aires des surfaces d'une figure quelconque.

340. L'évaluation générale de l'aire d'une surface, dont nous supposons les points rapportés à des axes rectangulaires, dépend de considérations analogues à celles qui ont été présentées dans le numéro 335. Toute question de ce genre, qui pourrait être proposée, se ramènera toujours à déterminer la valeur de la partie de l'aire d'une surface dont l'équation est

$$z = f(x, y),$$

qui est comprise dans un contour dont la projection sur le plan des xy est une ligne quelconque donnée Mm_1Nm_2 (*fig.* 52). Conservons les dénominations du n° 335, et désignons par v la valeur de la partie de l'aire dont il s'agit, qui se projette sur le plan des xy en Mm_1Nm_2, et qui est une fonction déterminée de l'abscisse op ou x. L'intervalle pq représentant dx, la partie de l'aire de la surface proposée qui se projette sur le plan des xy en $m_1n_1n_2m_2$ représentera dv. On aura

$$\int_{x_0}^{x} dv,$$

pour l'expression de v, et

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dv',$$

pour l'expression de la totalité de l'aire demandée, qui se projette en Mm_1Nm_2. Mais l'aire projetée en $m_1n_1n_2m_2$ est la somme d'un nombre infini d'éléments différentiels, tels

qui se projette sur le rectangle $m\nu n\mu$, dont le
est égal à dx, et le côté $m\mu$ est égal à dy. On
eurs l'expression de l'élément différentiel dont il
remarquant d'une part, que la surface proposée
egardée comme coïncidant dans l'étendue corres-
à cet élément avec son plan tangent mené au
m est la projection; et d'autre part, que l'aire
re quelconque tracée sur un premier plan, est
ire de la projection de cette même figure sur un
n divisée par le cosinus de l'angle compris entre
lans. Or, le cosinus de l'angle que le plan tan-
urface proposée forme avec le plan des xy étant,
n° 217,

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}},$$

nment

$$dxdy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1},$$

ession de l'élément différentiel de l'aire de la
se projette sur le rectangle $m\nu n\mu$. Il en résulte
ant une quantité infiniment petite du second
ıra

$$=dx\int_{y_1}^{y_2}dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1},$$

résentant les ordonnées m_1p et m_2p qui sont
onction de x; et par conséquent,

$$\int_{x_0}^{x}dx\int_{y_1}^{y_2}dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1},$$

pour l'expression de la portion de l'aire demandée qui se projette en Mm_1m_2, puis

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1},$$

pour l'expression de la totalité de cette aire.

341. Nous appliquerons cette formule générale à la recherche de l'aire de la surface sphérique, dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad \text{ou} \qquad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

l'origine des coordonnées étant placée au centre, et a représentant le rayon. Cette équation donnant

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

et la limite de la surface dans le sens des y étant représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad \text{ou} \qquad y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

qui appartient à l'intersection de cette surface et du plan des xy; la formule du numéro précédent donnera

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1},$$

ou

$$a \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

: de la moitié de la surface, qui est située au-
plan des xy. Mais on a

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = C + \text{arc sin.}\ \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

nant l'intégrale entre les limites indiquées,

$$\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-x^2}} = \pi.$$

: à prendre l'intégrale

$$\pi a \int_{-a}^{a} dx,$$

ur est $2\pi a^2$; ce qui donne $4\pi a^2$ pour la valeur
ère de la surface sphérique.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

RÉSUMÉ

DES

ONS D'ANALYSE

DONNÉES

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

II.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Cᵉ, rue Racine, 26.

RÉSUMÉ

DES

)NS D'ANALYSE

DONNÉES

'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PAR M. NAVIER,

lémie des sciences, Professeur d'analyse et de mécanique à l'École
que, Inspecteur divisionnaire des ponts et chaussées, etc.

SUIVI DE NOTES

PAR M. J. LIOUVILLE,

mbre de l'Institut et du bureau des longitudes.

DEUXIÈME ÉDITION,

revue

PAR M. ERNEST LIOUVILLE,

cien élève de M. Arago à l'Observatoire de Paris.

II.

PARIS.

:TOR DALMONT, ÉDITEUR,

Successeur de Carilian-Gœury et V^er Dalmont,

)RPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n° 49.

1856

TABLE DES MATIÈRES.

COURS DE LA DEUXIÈME ANNÉE,

OU DEUXIÈME PARTIE.

Pages.

Intégrales définies. Différentiation et intégration sous le signe $\int$ 1

Détermination de quelques intégrales définies. 5

Conditions d'intégrabilité pour les fonctions différentielles du premier ordre à plusieurs variables indépendantes. Intégration de ces fonctions lorsqu'elles satisfont aux conditions d'intégrabilité. 17

Équations différentielles du premier ordre à deux variables. 29

Équations différentielles du premier ordre où le coefficient différentiel n'entre qu'à la première puissance. . . 37

Du facteur propre à rendre l'équation intégrable. . . . 40

Théorème des fonctions homogènes. Intégration des équations homogènes. 47

Équations du premier ordre dans lesquelles se trouvent la seconde puissance ou les puissances supérieures du coefficient différentiel. 52

Solutions particulières des équations différentielles du premier ordre à deux variables.. 55

Équations différentielles à deux variables du second ordre et des ordres supérieurs. 72

Intégration des équations différentielles les plus simples du second ordre et des ordres supérieurs. 78

Intégration des équations linéaires à deux variables d'un ordre quelconque. 88

Élimination des variables entre les équations différentielles simultanées. Intégration des équations linéaires simultanées. 104

Intégration par séries des équations différentielles. 112

Équations aux différences ordinaires du premier ordre à trois variables. 120

Équations aux différences partielles du premier ordre. . . 125

Intégration des équations linéaires aux différences partielles du premier ordre. 133

Équations aux différences partielles, linéaires et à coefficients constants, d'un ordre quelconque. 151

Méthode des variations. 168

Des cas où il existe des relations données entre les variables. 197

Pages.

Exemples de l'application du calcul des variations. . . . 201
XL. Calcul des différences finies. 214
Différentiation des fonctions. 220
Intégration des fonctions. 229
Sommation des suites. 234
Intégration des équations aux différences finies, linéaires et à coefficients constants. 239
XLI. Formules d'interpolation. 243
Approximation des quadratures. 256
XLII. Lignes de niveau et de plus grande pente sur une surface. 261
XLIII. De la courbure des surfaces. 264
Des lignes de courbure. 274
De la surface lieu des centres de courbure. 285
Exemple de la détermination des lignes de courbure et des rayons de courbure. 289
XLIV. Des surfaces les plus simples dont l'équation aux différences partielles est du premier ordre. 298
Surfaces cylindriques. 304
Surfaces coniques. 308
Surfaces de révolution. 311
Surface gauche décrite par une ligne droite horizontale, passant toujours par une même verticale. 316

NOTES DE M. LIOUVILLE.

I. Sur la limite vers laquelle tend l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ lorsque m augmente indéfiniment. 321
II. Nouvelle expression du reste pour les formules de Maclaurin et de Taylor. 326
III. Sur les fractions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. . . . 329
IV. Sur un problème de géométrie relatif à la théorie des maxima et minima. 334
V. Sur quelques intégrales définies. 337
VI. Sur l'évaluation approchée du produit $1.2.3...x$, lorsque x est très-grand. 346
VII. Sur une application singulière de la théorie des intégrales doubles à la démonstration d'un théorème d'algèbre. . . 355
VIII. Sur l'équation différentielle du premier ordre : $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. 360
IX. Sur l'équation différentielle du second ordre : $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,y)$. 363
X. Sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles linéaires. 366

RÉSUMÉ

DES

)NS D'ANALYSE

DONNÉES

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

DEUXIÈME ANNÉE.

. INTÉGRALES DÉFINIES. — DIFFÉRENTIATION ET INTÉGRATION SOUS LE SIGNE $\int$.

ne intégrale définie telle que

$$\int_a^b f(\alpha).d\alpha,$$

ıble, $f(\alpha)$ une fonction quelconque de α, a et b tes. Cette formule est regardée, conformément a vu dans l'article XXVIII, comme présentant onstante déterminée; on s'en forme une idée ı concevant qu'elle exprime l'aire de la courbe l'abscisse, et $f(\alpha)$ l'ordonnée, cette aire étant

comprise entre l'axe des abscisses, la courbe et les ordonnées correspondantes aux abscisses $\alpha = a$ et $\alpha = b$. On pourra toujours obtenir d'une manière exacte ou approchée la valeur de la formule dont il s'agit, à l'exception des cas où l'ordonnée $f(\alpha)$ deviendrait infinie pour une ou plusieurs valeurs de α comprises entre les limites a et b, et de ceux où l'on aurait a ou $b = \pm\infty$: ces cas exigent le plus souvent un examen spécial.

343. Nous remarquerons maintenant qu'une intégrale définie peut être considérée sous un point de vue plus étendu, en admettant que la fonction désignée par $f(\alpha)$ contienne une quantité variable x. L'expression précédente devient alors une fonction variable de x, dont la valeur dépend de la forme de la fonction $f(\alpha)$, et des limites a, b. En effet, lorsque l'intégration définie indiquée par rapport à α est effectuée, cette quantité α a disparu, et il ne reste plus qu'une fonction contenant la seule variable x.

La variable x pourrait être aussi contenue dans l'expression des limites désignées par a et b. Ainsi l'expression générale d'une intégrale définie représentant une fonction de x est

$$X = \int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . f(x, \alpha).$$

344. Proposons-nous de différentier cette nouvelle espèce de fonction, c'est-à-dire de connaître l'accroissement dX correspondant à l'accroissement infiniment petit dx de la variable. En supposant d'abord que les limites de l'intégrale définie soient les constantes a et b, on aura

$$X + dX = \int_a^b d\alpha \left[f(x, \alpha) + \frac{d.f(x, \alpha)}{dx} dx \right];$$

et

$$\frac{dX}{dx} = \int_a^b d\alpha . \frac{d.f(x,\alpha)}{dx}.$$

Si nous admettons maintenant que les limites soient φx et ψx, nous aurons

$$X + dx = \int_{\varphi x + \frac{d.\varphi x}{dx} dx}^{\psi x + \frac{d.\psi x}{dx} dx} d\alpha \left[f(x,\alpha) + \frac{d.f(x,\alpha)}{dx} dx \right],$$

c'est-à-dire

$$X = \int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha \left[f(x,\alpha) + \frac{d.f(x,\alpha)}{dx} dx \right] - \left[f(x,\varphi x) + \frac{d.f(x,\varphi x)}{dx} dx \right] . \frac{d.\varphi x}{dx} dx$$
$$+ \left[f(x,\psi x) + \frac{d.f(x,\psi x)}{dx} dx \right] . \frac{d.\psi x}{dx} dx;$$

ù, en négligeant les quantités infiniment petites du se-
d ordre,

$$= \int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . \frac{d.f(x,\alpha)}{dx} dx - f(x,\varphi x) . \frac{d.\varphi x}{dx} dx + f(x,\psi x) \frac{d.\psi x}{dx} dx;$$

conséquent

$$= \int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . \frac{d.f(x,\alpha)}{dx} - f(x,\varphi x) . \frac{d.\varphi x}{dx} + f(x,\psi x) . \frac{d.\psi x}{dx}.$$

e résultat précédent devient très-sensible lorsqu'on
ente l'intégrale définie

$$X = \int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . f(x, \alpha),$$

comme exprimant l'aire PMNQ (*fig.* 54) de la courbe MN dont l'ordonnée est $f(x, \alpha)$, cette aire étant prise entre les abscisses $OP = \varphi(x)$ et $OQ = \psi(x)$. 1° Par la seule variation de x dans $f(x, \alpha)$, la courbe se transporte en mn, et l'aire augmente de l'espace MmnN représenté par $\int_{\varphi x}^{\psi x} d\alpha . \frac{d. f(x, \alpha)}{dx} dx$. 2° Par la seule variation de x dans la limite inférieure $\varphi(x)$, l'aire diminue de l'espace PMM'P' représenté par $f(x, \varphi x) . \frac{d . \varphi x}{dx} dx$. 3° Enfin par la seule variation de x dans la limite supérieure $\psi(x)$, l'aire augmente de l'espace QNN'Q' représenté par $f(x, \psi x) . \frac{d. \psi x}{dx} dx$. La variation simultanée de x dans les trois fonctions $f(x, \alpha)$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ change d'ailleurs l'aire PMNQ en P'$m'n'$Q'. La variation totale de cette aire est donc exprimée par les trois termes de la formule précédente, lorsqu'on néglige les espaces Mmm'M' et Nnn'N' qui sont infiniment petits du second ordre.

346. On voit par ce qui précède, qu'ayant l'égalité

$$X = \int_a^b d\alpha . f(x, \alpha),$$

les limites a, b étant supposées constantes, on obtient le coefficient différentiel du premier ordre de la fonction X en remplaçant sous le signe $\int$ la fonction $f(x, \alpha)$ par le coefficient différentiel du premier ordre de cette fonction pris par rapport à x. Il est facile d'en conclure que si l'on multiplie

les deux membres de cette même égalité par dx, et si l'on intègre de part et d'autre, on aura

$$\int X.dx = \int_a^b dx. \int dx f(x,\alpha).$$

Ces différentiations et intégrations sous le signe d'intégrale définie donnent le moyen de déterminer les valeurs de certaines intégrales, en partant des valeurs d'autres intégrales déjà connues.

Détermination de quelques intégrales définies.

347. La détermination des valeurs des intégrales définies, et l'étude des relations qui existent entre ces valeurs, ont beaucoup occupé les géomètres; mais nous ne pouvons présenter sur ce sujet que quelques aperçus.

Lorsque l'intégration indéfinie de la fonction qui se trouve sous le signe $\int$ peut être effectuée, la valeur de l'intégrale définie proposée s'en déduit immédiatement. Il suffira de citer quelques exemples très-simples d'intégrales obtenues de cette manière.

348. Puisque l'on a

$$\int x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m},$$

on en conclut, en supposant l'exposant m positif

$$\int_0^1 x^{m-1} dx = \frac{1}{m} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^{m+1}} = \infty.$$

Pour $m = 0$, on a

$$\int \frac{dx}{x} = lx, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty.$$

349. Les équations

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \text{arc. tang.} \frac{x}{a},$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc. sin.} \frac{x}{a},$$
$$\int dx.e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a},$$

donnent, pour a positive,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a},$$
$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^\infty dx.e^{ax} = \infty, \quad \int_0^\infty dx.e^{-ax} = \frac{1}{a}.$$

comme l'on a, en intégrant par parties,

$$\int dx.x^{a-1}.e^{-x} = -x^{a-1}.e^{-x} + (a-1) \int dx.x^{a-2}.e^{-x},$$

on trouve, lorsque a est un nombre entier positif,

$$\int_0^\infty dx.x^{a-1}.e^{-x} = 1.2.3.4.....(a-1).$$

350. Les équations

$$\int dx.\sin.ax. = -\frac{\cos.ax}{a}, \qquad \int dx.\cos.ax = \frac{\sin.ax}{a},$$

donnent

$$\int_0^\pi dx.\sin.ax = \frac{1-\cos.a\pi}{a}, \qquad \int_0^\pi dx.\cos.ax = \frac{\sin.a\pi}{a}.$$

Ainsi la valeur de la première intégrale est $\frac{2}{a}$ lorsque a est un nombre entier impair, et zéro lorsque a est un nombre entier

econde intégrale est toujours égale à zéro lorsque a
mbre entier.

es équations

$$\int dx.x \sin.ax = -\frac{x \cos.ax}{a} + \frac{\sin.ax}{a^2},$$

$$\int dx.x \cos.ax = \frac{x \sin.ax}{a} + \frac{\cos.ax}{a^2},$$

nt, pour a entier,

$$\int_0^\pi dx.x \sin.ax = -\frac{\pi \cos.a\pi}{a},$$

$$\int_0^\pi dx.x \cos.ax = \frac{\cos.a\pi - 1}{a^2}.$$

conséquent, suivant que a est entier impair ou entier
, la première intégrale est $+\frac{\pi}{a}$ ou $-\frac{\pi}{a}$; et la seconde
égrale est $-\frac{2}{a^2}$ ou 0.

352. Des équations

$$\int dx.\sin.^2 x = -\frac{\sin.x.\cos.x}{2} + \frac{1}{2}x,$$

$$\int dx.\cos.^2 x = \frac{\sin.x.\cos.x}{2} + \frac{1}{2}x,$$

on déduit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^2 x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\cos.^2 x = \frac{\pi}{4};$$

et en général, les formules de réduction données n° 294,

$$\int dx.\sin.^m x = -\frac{\sin.^{m-1}x.\cos.x}{m} + \frac{m-1}{m}\int dx.\sin.^{m-2}x,$$

$$\int dx.\cos.^m x = \frac{\sin.x.\cos.^{m-1}x}{m} + \frac{m-1}{m}\int dx.\cos.^{m-2}x,$$

conduisent aux résultats suivants : 1° lorsque m est un nombre entier pair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^m x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\cos.^m x = \frac{1.3.5.....(m-1)}{2.4.6.....m}\frac{\pi}{2};$$

2° Lorsque m est un nombre entier impair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^m x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\cos.^m x = \frac{2.4.6.....(m-1)}{3.5.7.....m},$$

En se représentant les trois intégrales successives

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^{2m-1}x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^{2m}x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.\sin.^{2m+1}x,$$

comme trois aires de courbes, et en observant que la seconde des trois ordonnées positives

$$\sin.^{2m-1}x, \quad \sin.^{2m}x, \quad \sin.^{2m+1}x$$

est comprise entre les deux autres, on arrive facilement aux deux inégalités suivantes

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}....\frac{2m-2}{2m-3}.\frac{2m-2}{2m-1}.\frac{2m}{2m-1}$$

et

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}....\frac{2m-2}{2m-3}.\frac{2m-2}{2m-1}.\frac{2m}{2m-1}.\frac{2m}{2m+1}.$$

Le rapport de ces deux produits tend vers la limite 1 quand m augmente ; d'où l'on conclut, en prenant m infini,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{7}.\frac{8}{9}....$$

Cette expression très-remarquable du nombre π a été donnée par Wallis.

353. Les équations

$$\int dx.e^{-ax}.\sin.bx = e^{-ax}.\frac{-a\sin.bx - b\cos.bx}{a^2+b^2},$$

$$\int dx.e^{-ax}.\cos.bx = e^{-ax}.\frac{b\sin.bx - a\cos.bx}{a^2+b^2},$$

qui se déduisent du n° 292, donnent

$$\int_0^\infty dx.e^{-ax}.\sin.bx = \frac{b}{a^2+b^2},\quad \int_0^\infty dx.e^{-ax}.\cos.bx = \frac{a}{a^2+b^2};$$

et l'on peut remarquer qu'à mesure que la quantité désignée par x approche de devenir égale à zéro, ces expressions approchent de plus en plus des limites $\frac{1}{b}$ et zéro. Néanmoins les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty dx.\sin.bx, \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty dx.\cos.ax,$$

prises en elles-mêmes, sont évidemment indéterminées.

354. Il serait superflu de multiplier ces exemples, puisque dans des cas semblables la recherche dont il s'agit n'offre pas de difficultés. Mais les géomètres ont déterminé, dans les cas même où la fraction sous le signe $\int$ ne peut être intégrée, les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies. Les méthodes employées pour cette détermination consistent principalement : 1° à déduire les valeurs des intégrales cherchées d'autres intégrales déjà connues, au moyen de la différentiation ou de l'intégration sous le signe $\int$; 2° à trouver entre la fonction que représente l'intégrale proposée et ses différentielles

des relations qui en font connaître la nature; 3° à passer des expressions réelles aux expressions imaginaires. La considération des intégrales doubles a également fait connaître plusieurs résultats importants. Nous présenterons quelques exemples propres à donner une idée des méthodes dont il s'agit.

355. Si dans l'équation donnée n° 348,

$$\int_0^1 dx.\, x^{m-1} = \frac{1}{m},$$

où l'on suppose m plus grand que zéro, on multiplie les deux membres par dm, et que l'on intègre à partir de $m = n$, conformément à ce qu'on a vu n° 346, on trouvera

$$\int_0^1 dx\, \frac{x^{m-1} - x^{n-1}}{lx} = l\frac{m}{n},$$

356. Reprenons les équations du n° 353,

$$\int_0^\infty dx.e^{-ax} \sin.\, bx = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \int_0^\infty dx.e^{-ax} \cos.\, bx = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Multipliant par da, et intégrant par rapport à a depuis $a = c$, il viendra

$$\int_0^\infty dx.\, \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \sin.\, bx = \text{arc.tang.}\, \frac{a}{b} - \text{arc.tang.}\, \frac{c}{b} = \text{arc.tang.}\, \frac{b(a-c)}{b^2 + ac}.$$

$$\int_0^\infty dx.\, \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \cos.\, bx = \frac{1}{2}\, l\, \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}.$$

357. Si l'on fait $c = 0$ et $a = \infty$, ces dernières équations donnent

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\sin.\, bx}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty dx\, \frac{\cos.\, bx}{x} = \infty.$$

Dans l'intégrale $\int_0^\infty dx \frac{\sin. bx}{x}$ on suppose b positif, sans quoi il faudrait $-\frac{\pi}{2}$ au lieu de $\frac{\pi}{2}$. Sa valeur est et doit être indépendante du nombre b. En effet, supposant $x = \frac{z}{b}$, cette intégrale se change en $\int_0^\infty dz \frac{\sin. z}{z}$, où b a disparu.

358. Soit l'intégrale

$$\int_0^\infty dx.e^{-x^2}.$$

En la multipliant par une autre intégrale pareille dans laquelle nous écrirons y au lieu de x, nous aurons

$$\int_0^\infty dy.e^{-y^2}.\int_0^\infty dx.\, e^{-x^2} = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\,.\, e^{-(y^2+x^2)}.$$

Posons maintenant $y = xt$, t étant une nouvelle variable. Quelle que soit x entre les limites 0 et ∞, aux valeurs 0 et ∞ de y correspondront également les valeurs 0 et ∞ de t; et l'on aura d'ailleurs $dy = xdt$. L'expression précédente se changera donc en

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dt.x.e^{-(1+t^2)x^2} = \int_0^\infty dt \int_0^\infty dx.x.e^{-(1+t^2)x^2}.$$

Effectuant d'abord l'intégration par rapport à x, elle deviendra

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2};$$

et comme $\int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc. tang. } t$, et par conséquent

$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, nous aurons définitivement $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$ pour la valeur du quarré de l'intégrale $\int_0^\infty dx.e^{-x^2}$. Donc

$$\int_0^\infty dx.e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

expression très-remarquable, et fréquemment employée dans plusieurs applications de l'analyse.

359. Considérons maintenant l'intégrale.

$$U = \int_0^\infty dx.\cos.rx.e^{-a^2x^2}.$$

Différentiant par rapport à r, on trouve

$$\frac{dU}{dr} = -\int_0^\infty dx.x\sin.rx.e^{-a^2x^2}.$$

Mais nous avons en intégrant par parties,

$$\int dx.x\sin.rx.e^{-a^2x^2} = -\frac{1}{2a^2}\sin.rx.e^{-a^2x^2} + \frac{r}{2a^2}\int dx.\cos.rx.e^{-a^2x^2};$$

d'où l'on déduit, puisque le terme hors du signe est nul aux deux limites 0 et ∞,

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{r}{2a^2}U.$$

Cette équation fait connaître la nature de la fonction U, qui est nécessairement

$$U = A.e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

A désignant une constante. Ainsi nous avons

$$\int_0^\infty dx \,.\, \cos. rx \,.\, e^{-a^2x^2} = \mathrm{A} \,.\, e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

Pour déterminer la constante A, on supposera $r = 0$, ce qui donnera

$$\int_0^\infty dx \,.\, e^{-a^2x^2} = \mathrm{A}.$$

Or de l'équation $\int_0^\infty dt.e^{-t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, obtenue n° 358, on déduit en faisant $t = ax$, $\int_0^\infty dx \,.\, e^{-a^2x^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{\pi} = \mathrm{A}$. L'expression de l'intégrale proposée est donc définitivement

$$\int_0^\infty dx \,.\, \cos. rx \,.\, e^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \,.\, e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

360. Soit encore l'intégrale

$$\int_0^\infty dx \frac{\cos. ax}{1+x^2},$$

et prenons d'abord pour limite supérieure $\frac{2k\pi}{a}$, k désignant un nombre entier. En écrivant donc

$$\mathrm{U} = \int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx \frac{\cos. ax}{1+x^2},$$

et différentiant deux fois de suite par rapport à a, conformément à la règle donnée n° 344, il viendra

$$\frac{dU}{da} = -\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx \frac{x \sin. ax}{1 + x^2} - \frac{2k\pi}{a^2 + 4k^2\pi^2},$$

$$\frac{d^2U}{da^2} = -\int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx \frac{x^2 \cos. ax}{1 + x^2} + \frac{4k\pi a}{(a^2 + 4k^2\pi^2)^2};$$

d'où l'on conclut

$$U - \frac{d^2U}{dx^2} = \int_0^{\frac{2k\pi}{a}} dx \cos. ax - \frac{4k\pi a}{(a^2 + 4k^2\pi^2)^2},$$

ou simplement (puisque l'intégrale du second membre a une valeur nulle),

$$U - \frac{d^2U}{da^2} = -\frac{4k\pi a}{(a^2 + 4k^2\pi^2)^2}.$$

Admettons maintenant que k soit un nombre infiniment grand; le second membre de cette équation deviendra infiniment petit. Par conséquent si U représente l'intégrale proposée, nous aurons

$$U = \frac{d^2U}{da^2}.$$

Cette équation détermine la nature de la fonction U, dont l'expression la plus générale est

$$Ae^{-a} + Be^{a},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires. Mais il est

l'on doit faire $B = 0$, puisque la valeur de l'intégrée ne peut croître indéfiniment avec le nombre a. simplement

$$\int_0^\infty dx \frac{\cos. ax}{1 + x^2} = A. e^{-a}.$$

terminer la constante A, on supposera $a = 0$, ne $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} = A$, il vient définitivement

$$\int_0^\infty dx \frac{\cos. ax}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

. Si l'on remplace dans cette équation x par $\frac{x}{m}$, et a ma, elle se change en

$$\int_0^\infty dx \frac{\cos. ax}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m} e^{-ma};$$

n différentiant par rapport à a, on a le résultat non moins narquable

$$\int_0^\infty dx \frac{x \sin. ax}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ma}.$$

362. Pour donner un exemple de l'usage des imaginaires nous prendrons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^\infty dx . \cos. 2rx . e^{-x^2}.$$

En remplaçant cos. $2rx$ par sa valeur en exponentielles imaginaires, elle deviendra

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \,.\, e^{-x^2+2rx\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \,.\, e^{-x^2-2rx\sqrt{-1}},$$

ou en multipliant et divisant par e^{-r^2}, afin de rendre les exposants de e, sous les signes d'intégration, des quarrés parfaits,

$$\frac{1}{2}e^{-r^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \,.\, e^{-(x-r\sqrt{-1})^2} + \frac{1}{2}e^{-r^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \,.\, e^{-(x+r\sqrt{-1})^2}.$$

Mais on a, comme on l'a vu n° 358,

$$\int_0^{\infty} dx \,.\, e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \text{ et par conséquent } \int_{-\infty}^{\infty} dx . e^{-x^2} = \sqrt{\pi};$$

d'où l'on conclut

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \,.\, e^{-(x+b)^2} = \sqrt{\pi},$$

quelle que soit la constante réelle b. Étendons maintenant ce résultat aux valeurs imaginaires de b, en faisant $b = \pm r\sqrt{-1}$; l'expression précédente de l'intégrale proposée deviendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx . \cos. 2rx \,.\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \,.\, e^{-r^2},$$

et l'on aura par conséquent

$$\int_0^{\infty} dx . \cos. 2rx . e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} . e^{-r^2},$$

Ce résultat s'accorde avec celui qui a été obtenu n° 359.

ONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ POUR LES FONCTIONS DIFFÉREN-
; DU PREMIER ORDRE A PLUSIEURS VARIABLES INDÉPEN-
;. —— INTÉGRATION DE CES FONCTIONS LORSQU'ELLES SATIS-
AUX CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ.

Considérons une fonction différentielle d'une seule
ıe telle que Xdx, X désignant une fonction contenant
iable x et des quantités constantes. La fonction Xdx
a toujours être regardée comme la différentielle exacte
; certaine fonction de x. En effet, ou Xdx sera la
:entielle d'une fonction connue de x, et dans ce cas
:gration s'effectuerait immédiatement, ou du moins l'on
rra effectuer cette intégration en développant la fonction
n série ordonnée en suivant les puissances entières de la
iable x ou $x-a$, et prenant l'intégrale de chaque terme.
364. Soit maintenant une fonction différentielle du pre-
.er ordre de deux variables x, y, telle que $Pdx + Qdy$,
ı P, Q désignent des fonctions quelconques de x et y. Une
lle fonction ne peut pas être regardée en général comme
tant la différentielle exacte d'une fonction de x, y : cela
ı'a lieu qu'autant qu'il existe une certaine relation entre
es quantités P et Q. En effet, soit U une fonction quel-
conque de x, y: la différentielle complète de U, c'est-à-dire
l'accroissement de U correspondant aux accroissements si-
multanés dx et dy de x et y, sera, comme on l'a vu dans
l'article IV,

$$dU = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy,$$

où $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, représentent respectivement les coefficients dif-
férentiels de la fonction U pris en regardant x seule comme

variable, et y seule comme variable. Il faut donc, pour que la fonction proposée $Pdx + Qdy$ résulte de la différentiation d'une fonction quelconque U, que l'on puisse écrire

$$P = \frac{dU}{dx}, \qquad Q = \frac{dU}{dy}.$$

Mais on a, comme on l'a vu n° 69, $\frac{d^2U}{dxdy} = \frac{d^2U}{dydx}$; donc on devrait avoir également

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},$$

équation qui exprime la relation qui doit subsister entre les fonctions P, Q, pour que $Pdx + Qdy$ soit la différentielle d'une fonction quelconque de x, y.

365. Si la fonction proposée est $Pdx + Qdy + Rdz$, où P, Q, R désignent des fonctions quelconques de x, y, z, on remarquera que U étant une fonction quelconque de x, y, z, on a

$$dU = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz.$$

Mais

$$\frac{d^2U}{dxdy} = \frac{d^2U}{dydx}, \qquad \frac{d^2U}{dxdz} = \frac{d^2U}{dzdx}, \qquad \frac{d^2U}{dydz} = \frac{d^2U}{dzdy}.$$

Donc la fonction proposée ne pourra être la différentielle d'une certaine fonction de x, y, z, à moins que les fonctions P, Q, R ne satisfassent aux conditions

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \qquad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \qquad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}.$$

Et ainsi de suite s'il y avait un plus grand nombre de variables.

366. Lorsque les fonctions différentielles proposées satisfont aux conditions d'intégrabilité, on peut en obtenir l'intégrale de la manière suivante. Soit

$$dU = Pdx + Qdy;$$

l'intégrale U doit nécessairement être de la forme

$$U = \int Pdx + Y,$$

en désignant par Y une fonction de la variable y seule. Or, cette dernière équation donnerait :

$$\frac{dU}{dy} = \int \frac{dP}{dy} dx + \frac{dY}{dy},$$

quantité qui doit être égale à Q. Ainsi

$$\frac{dY}{dy} = Q - \int \frac{dP}{dy} dx,$$

et

$$X = const. + \int dy \left(Q - \int dx \frac{dP}{dy}\right).$$

L'intégrale cherchée est donc

$$U = const. + \int dx.P + \int dy \left(Q - \int dx \frac{dP}{dy}\right).$$

367. On vérifie que ce procédé d'intégration suppose l'existence de la condition indiquée n° 364. En effet, pour que la quantité $Q - \int dx \frac{dP}{dy}$ soit une fonction de y seule, il faut que la différentielle de cette fonction prise par rapport à x soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = 0.$$

368. Soit pour exemple la fonction différentielle

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

Comme nous avons

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 + y^2 - y.2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{x^2 + y^2 - x.2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

la fonction proposée satisfait aux conditions d'intégrabilité. En suivant la méthode précédente, nous écrirons donc

$$U = \int \frac{ydx}{x^2 + y^2} + Y = \text{arc. tang.}\,\frac{x}{y} + Y,$$

et

$$\frac{dU}{dy} = -\frac{x}{y^2 + x^2} + \frac{dY}{dy}.$$

Mais en comparant avec la fonction proposée, on voit que $\frac{dY}{dy}$ doit être nulle. L'intégrale cherchée est donc simplement

$$U = const. + \text{arc. tang.}\,\frac{x}{y}.$$

369. Soit encore proposée la différentielle

$$dU = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right).$$

Elle satisfait aux conditions d'intégrabilité, car l'on trouve

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Nous écrirons donc

$$U = \int dx \frac{x^2 + xy + y^2}{(x^2 + y^2)x} + Y,$$

qui se met facilement sous la forme

$$U = \int dx \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x}\right) + Y,$$

et donne

$$U = \text{arc. tang.} \frac{x}{y} + lx + Y.$$

On en déduit

$$\frac{dU}{dy} = -\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{dY}{dy};$$

et en comparant avec la différentielle proposée,

$$-\frac{x^2 + xy + y^2}{(x^2+y^2)y} = -\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{dY}{dy};$$

d'où

$$\frac{dY}{dy} = -\frac{1}{y}, \quad \text{et par conséquent} \quad Y = const. - ly.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$U = \text{arc tang.} \frac{x}{y} + l\frac{x}{y} + const.$$

370. Les mêmes considérations s'appliquent aux différentielles contenant trois ou un plus grand nombre de variables. Soit

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz,$$

une différentielle proposée satisfaisant aux conditions d'intégrabilité indiquées n° 365. L'intégrale U doit nécessairement

être de la forme

$$U = \int P dx + Y,$$

Y désignant ici une fonction des variables y et z seules. Cette équation donne comme ci-dessus,

$$\frac{dU}{dy} = \int \frac{dP}{dy} dx + \frac{dY}{dy},$$

quantité qui doit être égale à Q. Donc

$$\frac{dY}{dy} = Q - \int \frac{dP}{dy} dx, \quad \text{et} \quad Y = \int dy \left(Q - \int dx \frac{dP}{dy}\right) + Z,$$

Z désignant une fonction de la variable z seule. Ainsi l'on a

$$U = \int P dx + \int dy \left(Q - \int dx \frac{dP}{dy}\right) + Z,$$

et par conséquent

$$\frac{dU}{dz} = \int dx \frac{dP}{dz} + \int dy \left(\frac{dQ}{dz} - \int dx \frac{d^2P}{dydz}\right) + \frac{dZ}{dz}.$$

Cette dernière quantité devant être égale à R, la fonction Z est déterminée par l'équation

$$\frac{dZ}{dz} = R - \int dx \frac{dP}{dz} - \int dy \left(\frac{dQ}{dz} - \int dx \frac{d^2P}{dydz}\right),$$

ce qui donne

$$Z = const. + \int dz \left[R - \int dx \frac{dP}{dz} - \int dy \left(\frac{dQ}{dz} - \int dx \frac{d^2P}{dydz}\right)\right].$$

Ainsi l'intégrale cherchée est

$$U = const. + \int dx . P + \int dy \left(Q - \int dx \frac{dP}{dy}\right)$$
$$+ \int dz \left[R - \int dx \frac{dP}{dz} - \int dy \left(\frac{dQ}{dz} - \int dx \frac{d^2P}{dydz}\right)\right].$$

'érifie encore ici que ce procédé d'intégration
stence des conditions d'intégrabilité indiquées
'et, pour que le second membre de l'équation

$$\frac{dY}{dy} = Q - \int \frac{dP}{dy} dx$$

e premier, indépendant de x, il faut que la dif-
se par rapport à x soit nulle, c'est-à-dire que

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

que la quantité

$$\text{ı} - \int dx . \frac{dP}{dz} - \int dy \left(\frac{dQ}{dz} - \int dx \frac{d^2P}{dydz}\right)$$

ion de z seule, il faut que les différentielles de
prises par rapport à x et par rapport à y soient
donne

$$\frac{R}{x} - \frac{dP}{dz} - \int dy \left(\frac{d^2Q}{dzdx} - \frac{d^2P}{dydz}\right) = 0,$$

$$\frac{R}{y} - \int dx . \frac{d^2P}{dzdy} - \frac{dQ}{dz} + \int dx \frac{d^2P}{dydz} = 0.$$

ɛ dernières équations, les termes où entre le
ruisent en vertu de la relation obtenue d'abord
On a donc finalement, comme au n° cité,

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}.$$

ɔur exemple la différentielle

$$\frac{2x(y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy - \frac{2z}{x^2 + z^2} dz.$$

Elle satisfait aux conditions d'intégrabilité : car on trouve

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{dP}{dz}=\frac{dR}{dx}=\frac{4yz}{(x^2+z^2)^2},\quad \frac{dQ}{dz}=\frac{dR}{dy}=0.$$

Nous écrirons donc

$$U=-\int dx\,\frac{2x(y^2-z^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}+Y,$$

qui revient à

$$U=\int dx\left(\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+z^2}\right)+Y,$$

c'est-à-dire

$$U=l(x^2+y^2)-l(x^2+z^2)+Y.$$

Cette expression donne

$$\frac{dU}{dy}=\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{dY}{dy},$$

et en comparant avec la fonction proposée, on voit que $\frac{dY}{dy}$ doit être nulle. Donc Y ne peut contenir que la variable z.
On aurait alors

$$\frac{dU}{dz}=-\frac{2z}{x^2+z^2}+\frac{dY}{dz},$$

et en comparant encore avec la fonction proposée, on voit que $\frac{dY}{dz}$ doit être nulle. L'intégrale cherchée est donc simplement

$$U=l\,\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}+const.$$

373. Soit encore pour exemple la différentielle

$$\frac{x}{z} + \frac{x^2+(y-z)^2}{x^2+y^2+z^2}\,\frac{dy}{z} + \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}\,\frac{dz}{z} - \frac{ydz}{z^2} + \frac{dz}{z^3}.$$

conditions d'intégrabilité, car on trouve

$$\frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \qquad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx} = \frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{Q}{z} = \frac{dR}{dy} = \frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{1}{z^2}.$$

lonc, conformément à la méthode précé-

$$= -\int dx\,\frac{x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)x} + Y,$$

$$= \int dx\left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right) + Y,$$

séquent

$$U = lx - l(x^2+y^2+z^2) + Y.$$

$$\frac{dU}{dy} = -\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{dY}{dy},$$

avec la différentielle proposée donne

$$\frac{(y-z)^2}{(y^2+z^2)z} = -\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{dY}{dy},$$

et par conséquent $Y = \frac{y}{z} + Z.$

actuellement

$$lx - l(x^2+y^2+z^2) + \frac{y}{z} + Z.$$

Donc

$$\frac{dU}{dz} = -\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} - \frac{y}{z^2} + \frac{dZ}{dz};$$

et en comparant avec la différentielle proposée,

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)z} - \frac{y}{z^2} + \frac{1}{z^3} = -\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} - \frac{y}{z^2} + \frac{dZ}{dz},$$

d'où

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}, \quad \text{et par conséquent } Z = lz - \frac{1}{2z^2} + const.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$U = l\frac{xz}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y}{z} - \frac{1}{2z^2} + const.$$

374. Il est superflu de remarquer que l'on parvient au même résultat quelle que soit la variable par laquelle on commence l'intégration. Si dans l'exemple précédent, on veut commencer par la variable z, on écrira

$$U = \int dz \left(\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)z} - \frac{y}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right) + X,$$

X désignant une fonction de x et y seules. Cette équation revient à

$$U = \int dz \left(-\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{z} - \frac{y}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right) + X,$$

ou

$$U = -l(x^2+y^2+z^2) + lz + \frac{y}{z} - \frac{1}{2z^2} + X.$$

On en déduit

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + \frac{dX}{dx};$$

ec la fonction proposée l'on a

$$\frac{{}^2-y^2-z^2}{+y^2+z^2)x} = -\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + \frac{dX}{dx},$$

$$= \frac{1}{x}, \qquad \text{et} \qquad X = lx + Y,$$

e fonction de y seule. Nous avons donc

$$^2+y^2+z^2) + lz + \frac{y}{z} - \frac{1}{2z^2} + lx + Y,$$

$$= -\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{z} + \frac{dY}{dy},$$

avec la fonction proposée, on voit que e, ou que la fonction Y se réduit à une eur complète de U est donc comme ci-

$$\frac{xz}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y}{z} - \frac{1}{2z^2} + const.$$

ans l'équation

$$dU = Pdx + Qdy,$$

e est une différentielle exacte, U est une x variables indépendantes x, y. Dans la

géométrie on regardera cette fonction comme l'ordonnée d'une surface, mesurée perpendiculairement au plan dans lequel seront comptées les deux abscisses x et y. Mais il n'en est plus de même si la fonction différentielle $Pdx + Qdy$ ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité. L'équation dont il s'agit n'a plus alors aucun sens, puisqu'on ne peut plus la concevoir dérivée d'une relation analytique existante entre les trois quantités U, x, y. On ne peut lui en donner un qu'en établissant une certaine relation entre les variables x et y, qui ne seront plus alors toutes deux indépendantes. Posant donc $y = \varphi(x)$, φ désignant une fonction entièrement arbitraire, l'équation proposée deviendra de la forme

$$dU = Mdx,$$

M étant une fonction de x seule, qui contiendra la fonction arbitraire $\varphi(x)$ et son coefficient différentiel du premier ordre. L'équation $dU = Mdx$ peut toujours être intégrée. La fonction U qui sera donnée par l'intégration, représentera l'ordonnée d'une courbe dont la projection sur le plan des x, y a pour équation $y = \varphi(x)$; et il est évident qu'à raison de l'indétermination de la fonction φ, il existe une infinité de courbes différentes auxquelles l'ordonnée U peut appartenir.

Ces notions s'étendront facilement aux cas où la fonction différentielle proposée contient un plus grand nombre de variables.

ATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE
A DEUX VARIABLES.

›rend en général sous cette dénomination
: la forme.

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

:st regardée comme la variable indépen-
ıne fonction variable dont la valeur dépend
$\frac{dy}{dx}$ est le coefficient différentiel du premier
ar rapport à x, c'est-à-dire le rapport des
nultanés des variables x et y. Il s'agit de se
le la relation qu'une telle équation établit
iables.

ir, on remarque que l'équation propo-
être censée résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$,
:n ait tiré

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y),$$

gnant une fonction qui peut en général
lusieurs valeurs distinctes. Admettons en
le ne présente qu'une seule valeur, et,
, considérons x comme une abscisse et y
correspondante, en sorte que l'équation
résenter la figure d'une courbe plane. Si

l'on attribue arbitrairement à x et y deux valeurs quelconques a et b, l'équation précédente donnera pour $\frac{dy}{dx}$ une valeur déterminée, au moyen de laquelle on pourrait connaître quelle serait la variation fort petite de y à partir de la valeur b, si x venait à augmenter ou à diminuer d'une quantité très-petite à partir de la valeur a. En effet, Δx représentant un très-petit accroissement de x, on a sensiblement $\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x$. Attribuant ensuite à x et y dans l'équation précédente les valeurs $a + \Delta x$ et $b + \frac{dy}{dx} \Delta x$, cette équation donnera une nouvelle valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui pourra être employée de la même manière. Il est évident qu'en opérant ainsi, on peut obtenir une courbe qui s'approchera indéfiniment de la courbe proposée à mesure que l'on attribuera des valeurs de plus en plus petites aux accroissements Δx. L'équation proposée doit donc être regardée comme déterminant la figure d'une certaine courbe dont on peut prendre arbitrairement un point quelconque.

Suivant la position arbitraire que l'on attribuera au premier point des courbes qui seraient construites par le moyen de l'équation précédente, non-seulement la position, mais en général la figure de ces courbes seront différentes. Néanmoins elles auront toutes un caractère commun, dont la nature est exprimée par l'équation différentielle proposée. Ainsi, à proprement parler, cette équation différentielle exprime une propriété commune à une infinité de courbes que l'on peut concevoir tracées sur un plan. Cette propriété détermine l'inclinaison de la tangente dans un point quelconque, en fonction des coordonnées de ce point : elle

n de construire la courbe entière, lorsqu'un
e de cette courbe est déterminé.
rquer d'ailleurs, que le choix de l'une quel-
bes en nombre infini auxquelles appartient
entielle proposée dépend d'une seule quan-
suffira de fixer, par exemple, la valeur de y
celle de $x = 0$. En effet, l'on doit toujours
ne courbe, quel que soit celui des points de
l'on se soit donné.
s en second lieu que l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

aleurs différentes pour le coefficient diffé-

t considérer chacune de ces valeurs à part,

e qui a été dit dans le n° précédent. On
que l'équation différentielle proposée ap-
s systèmes de courbes tracées sur un plan,
différents sens. Cette équation exprime
mmunes à toutes les courbes en nombre
ennent respectivement à chacun de ces
tés au moyen desquelles la tangente est
n point quelconque des courbes en fonc-
ées de ce point; en sorte que ces courbes
struites au moyen de l'équation proposée,
ts était donné.
de concevoir d'après cela ce que doit être
e ou l'*intégrale* de l'équation différen-
te équation primitive, si l'on veut qu'elle
ralité que l'équation différentielle, doit
elconque des courbes qui pourraient être

construites au moyen de cette équation. Ainsi, 1° il faut qu'elle contienne une *constante arbitraire*, c'est-à-dire différente des constantes qui peuvent se trouver dans l'équation différentielle proposée, et qui entreraient dans l'expression analytique de la propriété représentée par cette équation. L'indétermination de la constante dont il s'agit donnera au résultat toute la généralité nécessaire pour qu'il représente le système entier des courbes auxquelles convient l'équation proposée. 2° il faut que cette équation primitive *satisfasse* à l'équation différentielle proposée, c'est-à-dire que les valeurs de y et $\frac{dy}{dx}$ qui seraient tirées de l'équation primitive et de sa différentielle étant substituées dans l'équation proposée, la rendent identique, ou du moins qu'en éliminant la constante arbitraire entre l'équation primitive et sa différentielle, on retrouve l'équation proposée.

379. Toute équation en termes finis qui satisfait à une équation différentielle proposée, et qui contient une constante arbitraire, est l'*intégrale générale* de cette équation différentielle. Cette intégrale générale donne les *intégrales particulières* quand on y attribue diverses valeurs à la constante arbitraire.

Il existe dans beaucoup de cas des équations primitives qui satisfont à une équation différentielle proposée, mais qui ne contiennent pas de constante arbitraire. Quelquefois ces équations sont des intégrales particulières dans lesquelles la constante arbitraire a disparu, à raison d'une certaine valeur que l'on aurait attribuée à cette constante, comme cela aurait lieu, par exemple, si on l'avait supposée égale à zéro ou infinie. D'autres fois les équations primitives dont il s'agit ont un caractère spécial, et doivent être considérées à part : elles constituent alors ce qu'on a nommé *solutions particu-*

ous occupons seulement dans cet article de la
l'intégrale générale.
our exemple l'équation différentielle

$$x\frac{dy}{dx} - y + b = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-b}{x},$$

le que cette équation appartient à une ligne
que passant par le point dont les coordonnées
$= b$. L'intégrale générale est

$$y - ax - b = 0.$$

équation primitive satisfait à l'équation diffé-
e que les valeurs $y = ax + b$, $\frac{dy}{dx} = a$, que
, rendent identique cette équation différen-
elle contient la constante arbitraire a qui
s l'équation proposée. En faisant varier cette
ntégrales particulières qu'on obtiendra repré-
s les lignes droites diversement inclinées qui
l'axe des y, à une distance b de l'origine.
core l'équation différentielle

$$x = 0, \quad \text{ou} \quad dy - (a + 2x)dx = 0,$$

primitive est

$$y - ax - x^2 + b = 0,$$

ante arbitraire. Cette équation primitive re-

présente une parabole dont le paramètre est égal à 1, et dont l'axe est parallèle à l'axe des y et placé à une distance $-\frac{a}{2}$ de cet axe. La courbe coupe l'axe des y à la distance $-b$ de l'origine. Pour avoir toutes les courbes auxquelles appartient l'équation différentielle proposée, il suffira donc de faire varier la constante b dans l'équation primitive, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; ou de transporter la parabole parallèlement aux y, sans changer la position de son axe.

L'équation différentielle $\frac{dy}{dx}-a-2x=0$ conduit à l'équation primitive $y-ax-x^2+b=0$, dans laquelle b est la constante arbitraire. On peut proposer de chercher une autre équation différentielle, qui conduirait à la même équation primitive dans laquelle a serait la constante arbitraire. Cette équation différentielle se trouvera immédiatement, en préparant l'équation primitive de manière que la différentiation fasse disparaître la constante a, c'est-à-dire en la résolvant par rapport à cette constante, ce qui donne

$$\frac{y-x^2+b}{x}-a=0.$$

Différentiant, et supprimant le facteur commun $\frac{1}{x^2}$, il vient

$$y-x\frac{dy}{dx}+x^2+b=0.$$

On peut aussi trouver la même équation différentielle sans résoudre l'équation primitive par rapport à a, en éliminant cette constante entre l'équation primitive et l'équation $\frac{dy}{dx}-a-2x=0$, qui s'en déduit par la différentiation.

férentielle que nous venons d'obtenir en der-
ans laquelle la constante a a disparu, appar-
en que l'équation primitive dans laquelle a est
me la constante arbitraire, à toutes les para-
nètre $=1$, dont l'axe est parallèle à l'axe des y,
cet axe à la distance $-b$ de l'origine des coor-

l'équation $y - x\frac{dy}{dx} + x^2 + b = 0$ était pro-
pourrait pas en déduire immédiatement l'équa-
dont elle dérive ; car le premier membre n'est
entielle exacte d'une fonction des variables x et
evient en restituant le facteur $\frac{1}{x^2}$.
uation différentielle proposée était

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0,$$

it

$$\frac{dy}{dx} = \pm a.$$

ient, cette équation appartient aux deux sys-
s droites qui forment avec l'axe des x des an-
angentes trigonométriques sont respectivement
a pour intégrale générale

$$y^2 - a^2x^2 - 2by + b^2 = 0 \ ,$$

multiplication des deux équations $y + ax - b = 0$,
$= 0$, qui appartiennent respectivement, à cause
e arbitraire b, à l'une quelconque des lignes
ou de l'autre système. En effet, en différen-
précédente, on a

$$y\frac{dy}{dx} - a^2x - b\frac{dy}{dx} = 0\,;$$

et en éliminant b entre ces deux équations, on retrouvera l'équation proposée.

383. En général, étant donnée une équation primitive contenant les deux variables x, y et plusieurs constantes a, b, c, etc., que nous désignons par

$$F(x, y, a, b, c, \text{etc.}) = 0\,,$$

l'équation qui s'en déduit immédiatement par la différentiation,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0\,, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0\,,$$

subsistera en même temps que cette équation primitive. On peut donc combiner d'une manière quelconque les deux équations dont il s'agit. Il est possible que la différentiation ait fait disparaître une des constantes a, b, c, etc.; et c'est ce qui aura lieu si cette constante se trouve seulement dans un terme qui ne contienne ni x, ni y. On peut éliminer une constante quelconque qui se trouverait à la fois dans les deux équations. On peut aussi éliminer une certaine fonction de x, y, qui se trouverait dans quelques termes. Il est possible enfin, que tous les termes de l'équation différentielle se trouvent multipliés par un facteur en x, y qui disparaîtra quand on égalera la somme de ces termes à zéro. On voit ainsi que d'une même équation primitive, on peut en général déduire par diverses opérations plusieurs équations différentielles différentes les unes des autres, et l'on conçoit la difficulté du problème qui consiste à trouver l'intégrale d'une équation différentielle quelconque proposée.

érentielles du premier ordre où le coefficient tiel n'entre qu'à la première puissance.

érons une équation différentielle proposée du dans laquelle le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ ne se emier degré, et qui sera de la forme

$$\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \text{ou} \qquad Pdx + Qdy = 0,$$

t des fonctions quelconques de x et y.
d'abord que, si la fonction $Pdx + Qdy$ était le exacte d'une certaine fonction de x, y, elle satisfaisait à la condition d'intégrabilité , il suffirait de prendre l'intégrale de cette mément aux règles données dans l'article intégrale, complétée par une constante ar- égalée à zéro, serait l'intégrale cherchée. Ce ne peut avoir lieu, qu'autant que l'équation posée est le résultat immédiat de la différen- ation primitive mise sous une forme telle, arbitraire se trouvant dans un terme où x et nt, cette constante a pu disparaître par le érentiation.
n proposée s'intègre toujours, ou du moins intégrale est ramenée aux quadratures, lors- sont *séparées*, c'est-à-dire, lorsque cette sous la forme

$$Xdx + Ydy = 0,$$

fonction quelconque de x seule, et Y

une fonction quelconque de y seule. L'intégrale générale est alors

$$\int dx.X + \int dy.Y + A = 0,$$

A désignant la constante arbitraire.

Les variables sont évidemment aisées à séparer quand l'équation étant résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = X.Y;$$

cela donne en effet

$$Xdx - \frac{dy}{Y} = 0.$$

386. La séparation des variables s'opère quelquefois au moyen d'une transformation, ou d'un changement de variables. L'exemple le plus remarquable est celui de l'équation

$$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0, \qquad \text{ou} \qquad dy + Pydx + Qdx = 0,$$

dans laquelle P, Q désignent des fonctions de x seule, et que l'on appelle *équation linéaire du premier ordre*, ou *équation du premier degré et du premier ordre*, parce qu'elle ne contient que la première puissance de la fonction y et de son coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. Soit fait

$$y = Xt, \qquad \text{d'où} \qquad dy = tdX + Xdt,$$

en désignant par X une fonction de x et par t une nouvelle variable. Ces valeurs, substituées dans l'équation proposée, donnent

$$tdX + Xdt + PXtdx + Qdx = 0.$$

:tion X étant indéterminée, on peut la déterminer
ıdition que l'équation soit partagée dans les deux
:

$$\int X + Q dx = 0, \qquad \text{et} \qquad dt + Pt dx = 0.$$

les sont séparées dans la seconde, qui donne,

$$= -P dx, \qquad lt = -\int P dx, \qquad t = e^{-\int P dx};$$

eur de t étant substituée dans la première, il

$$-dx.Qe^{\int P dx}, \qquad X = -\int dx.Qe^{\int P dx} + A.$$

valeurs de X et t dans $y = Xt$, on trouve

$$y = e^{-\int P dx}\left(-\int dx.Qe^{\int P dx} + A\right),$$

ale générale de l'équation proposée, A étant la
ɔitraire.
:ut intégrer par la même méthode les équations

$$y^{m-1}.dy + Py^m.dx + Qdx = 0,$$

ant toujours des fonctions quelconques de x. En
:rnière équation deviendra semblable à celle du
;i l'on pose $y^m = z$.
ıcore une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

, d'où $y = xt$, $\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$, cette équation

se change en

$$t + x\frac{dt}{dx} + f(t) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dt}{t+f(t)} + \frac{dx}{x} = 0,$$

dans lesquelles les variables sont séparées.

Du facteur propre à rendre l'équation intégrable.

389. Pour qu'une équation différentielle

$$Pdx + Qdy = 0,$$

se présente sous la forme différentielle exacte d'une fonction des deux variables x, y, il est nécessaire en général que cette équation soit le résultat immédiat de la différentiation de l'équation primitive. Mais lors même que cette circonstance a lieu, l'équation différentielle ne se présente pas toujours sous la forme d'une différentielle exacte, parce que la différentiation introduit quelquefois des facteurs communs aux différents termes, qui disparaissent quand on égale la différentielle à zéro. Par exemple, l'équation primitive étant

$$\frac{y}{x} = a,$$

la différentielle du premier membre est $\frac{xdy - ydx}{x^2}$, et en égalant cette quantité à zéro, on aura simplement

$$xdy - ydx = 0,$$

dont le premier membre n'est point une différentielle exacte.

390. Quelle que soit d'ailleurs l'origine d'une équation différentielle, on démontre qu'il existe toujours un facteur va-

si l'équation est multipliée par ce facteur, elle
ıe différentielle exacte. En effet, supposons l'é-
ɔsée mise sous la forme

$$\frac{dy}{dx} + V = 0,$$

une fonction quelconque de x, y. L'intégrale
ette équation aura pour premier membre une
on de x, y et d'une certaine constante arbi-
ıe se trouve pas dans l'équation différentielle.
'ayant résolu cette intégrale générale par rap-
'ait mise sous la forme

$$U = a,$$

ıe fonction de x, y. Si nous différencions alors
il viendra

$$\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{dU}{dx}}{\frac{dU}{dy}} = 0,$$

laquelle la constante a a disparu, et qui doit
être identique avec l'équation différentielle
ıit donc avoir

$$-\frac{\frac{dU}{dx}}{\frac{dU}{dy}}, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dy}{dx} + V\right)\frac{dU}{dy} = \frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

$+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}$ est la fonction dérivée complète

de la fonction U. Donc il en sera de même de la quantité $\frac{dy}{dx} + V$, lorsqu'on l'aura multipliée par $\frac{dU}{dy}$.

On est assuré d'après ce qui précède de l'existence d'un facteur par lequel l'équation proposée étant multipliée, cette équation devient immédiatement intégrable. De plus on voit quel doit être ce facteur, et qu'il serait connu si l'équation primitive était connue.

391. Soit, par exemple, l'équation primitive

$$y^2 - 2a(x+y) = 0.$$

En la différentiant on trouve

$$ydy - a(dx + dy) = 0\,;$$

et en éliminant la constante a entre ces deux équations on obtiendra l'équation différentielle

$$(2x + y)dy - ydx = 0.$$

Cette équation ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité. Mettant l'équation primitive sous la forme

$$\frac{y^2}{2(x+y)} = a\,,$$

on a pour la dérivée du premier membre prise par rapport à y, $\frac{y^2 + 2xy}{2(x+y)^2}$. Mettant également l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x+y} = 0\,,$$

si on la multiplie, conformément à ce qu'on a vu dans le

nt, par le facteur $\frac{(2x+y)y}{2(x+y)^2}$ on trouvera

$$\frac{y^2+2xy}{2(x+y)^2}\frac{dy}{dx}-\frac{y^2}{2(x+y)^2}=0,$$

e

$$\frac{(y^2+2xy)dy-y^2dx}{2(x+y)^2}=0,$$

ı où l'on reconnaît la différentielle complète de la

$\frac{y^2}{(x+y)}$, et dont par conséquent on déduit immé-

; l'équation primitive..

n conclut d'ailleurs de l'équation

$$\frac{dy}{dx}+V=\frac{\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}}{\frac{dU}{dy}},$$

0, qu'outre le facteur $\frac{dU}{dy}$, il en existe une infinité

qui auront la propriété de rendre la fonction $\frac{dy}{dx}+V$

érentielle exacte. En effet, on remarquera que la

$$\varphi(U).\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}\right)$$

ɔrivée complète d'une certaine fonction de U que nous

rons par $\Phi(U)$. Donc si on multipliait le premier

ɔ de l'équation précédente par

$$\varphi(U).\frac{dU}{dy},$$

il deviendrait une dérivée exacte d'une certaine fonction de x, y. Cette fonction serait la fonction même qui a été désignée par $\Phi(U)$; en sorte que l'intégrale serait

$$\Phi(U) = const.,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$U = const.,$$

c'est-à-dire l'intégrale de l'équation proposée. Ainsi tous les multiplicateurs compris dans l'expression $\varphi(U)\frac{dU}{dy}$, où φ désigne une fonction entièrement arbitraire, ramèneront toujours à cette même intégrale.

393. Nous avons obtenu dans le n° 386, pour l'intégrale de l'équation

$$dy + Pydx + Qdx = 0,$$

dans laquelle P et Q désignent des fonctions de x seule,

$$y = e^{-\int Pdx}\left(-\int dx.Qe^{\int Pdx} + A\right),$$

A étant la constante arbitraire. D'après ce qui précède on mettra donc cette intégrale sous la forme

$$A = \int dx.Qe^{\int Pdx} + y.e^{\int Pdx} = U,$$

et le facteur par lequel il faudra multiplier l'équation différentielle pour la rendre intégrable sera, conformément au n° 390, $\frac{dU}{dy} = e^{\int Pdx}$.

C'est ce qu'on peut vérifier directement ; car soit μ le fac-

:, que nous supposerons devoir être une fonction
Comme le terme $\mu Q dx$ est intégrable, il s'agit
: déterminer μ par la condition de rendre une
exacte la quantité

$$\mu dy + \mu P y dx ;$$

ue l'on doit avoir

$$\text{ou} \quad \frac{d\mu}{\mu} = P dx ; \qquad \text{d'où} \qquad \mu = e^{\int P dx}.$$

général l'équation

$$P dx + Q dy = 0 ,$$

nt des fonctions quelconques de x et y. Si l'on
μ le facteur qui rendrait cette équation in-
ction μ devra évidemment satisfaire à la con-

$$\frac{d.\mu P}{dy} = \frac{d.\mu Q}{dx},$$

$$\frac{d\mu}{dy} - Q\frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

re équation est presque toujours plus diffi-
'équation proposée elle-même.
arquerons d'ailleurs, que toutes les fois
éparer les variables dans l'équation

$$P dx + Q dy = 0 ,$$

transformation quelconque, on connaît

immédiatement le facteur par lequel il faudrait multiplier cette équation pour rendre $Pdx + Qdy$ une différentielle exacte.

En effet, supposons qu'ayant remplacé x et y par d'autres variables s et t, l'équation proposée soit devenue

$$Mds + Ndt = 0,$$

M et N étant des fonctions de s et t; et qu'en divisant les deux termes par la fonction V de s et t les variables se trouvent séparées, en sorte que $\frac{M}{V}$ soit une fonction de s seule, et que $\frac{N}{V}$ soit une fonction de t seule. La quantité $\frac{M}{V}ds + \frac{N}{V}dt$ sera donc devenue une différentielle exacte. Or, en remplaçant dans cette quantité s et t par leurs valeurs en x et y, elle ne différera point de la quantité $\frac{P}{V}dx + \frac{Q}{V}dy$ (en concevant toujours que l'on ait mis dans V à la place de s et t leurs valeurs en x et y). Donc $\frac{P}{V}dx + \frac{Q}{V}dy$ serait nécessairement aussi une différentielle exacte.

396. Nous avons donné dans le n° 388, pour exemple de la séparation des variables, l'équation

$$f\left(\frac{y}{x}\right).dx + dy = 0,$$

qui, en faisant $y = xt$, d'où $dy = tdx + xdt$, devient

$$[f(t) + t]dx + xdt = 0,$$

et dans laquelle les variables se séparent lorsqu'on divise les deux termes par $x[f(t) + t]$. D'après ce qui précède, l'équation dont il s'agit doit donc être rendue intégrable en la mul-

le facteur $\frac{1}{x[f(t)+t]}$, où l'on remplacera t par sa
et y; c'est-à-dire par le facteur $\frac{1}{x\left(f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\right)}$.
te équation devient alors

$$\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)dx+dy}{x\left(f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\right)}=0,$$

ilement sous la forme

$$\frac{dx}{x}+\frac{\frac{dy}{x}-\frac{ydx}{x^2}}{f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}}=0:$$

grable, puisque $\frac{dy}{x}-\frac{ydx}{x^2}$ est la différentielle

les fonctions homogènes.— Intégration des équations homogènes.

gne par le nom de *Théorème des fonctions* ines relations qui existent entre une fonction -à-dire une fonction composée de termes somme des exposants des variables est un , et ses coefficients différentiels des divers apport à ces variables. Soit U une fonction sieurs variables x,y, etc. En mettant tx à la a place de y, tz à la place de z, etc., cette t^nU,n désignant la somme des exposants des

variables dans chaque terme. On peut d'ailleurs faire $t = 1 + g$, ce qui revient à mettre $x + gx$ à la place de x, $y + gy$ à la place de y, etc. On aura en appliquant le théorème de Taylor,

$$(1+g)^n U = U + g\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}y + \text{etc.}\right) +$$
$$+ \frac{g^2}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2U}{dxdy}xy + \frac{d^2U}{dy^2}y^2 + \text{etc.}\right) + \text{etc.};$$

et en développant le premier membre et égalant les termes affectés des mêmes puissances de l'indéterminée g,

$$nU = \frac{dU}{dx}x + \frac{dU}{dy}y + \text{etc.}$$
$$n(n-1)U = \frac{d^2U}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2U}{dxdy}xy + \frac{d^2U}{dy^2}dy^2 + \text{etc.}$$
etc.

398. La considération de ces relations facilite quelquefois l'intégration des fonctions de plusieurs variables. Lorsqu'une fonction est homogène, une différentiation effectuée sur cette fonction n'en altère pas l'homogénéité. Si $Pdx + Qdy + \text{etc.}$ est la différentielle d'une fonction homogène U de degré $n+1$, P, Q, etc. seront homogènes de degré n, et l'on aura

$$(n+1)U = Px + Qy + \text{etc.}$$

réciproquement, il est aisé de vérifier que P, Q, etc. étant des fonctions homogènes du même degré n et $Pdx + Qdy + \text{etc.}$ satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, on a en effet

$$d(Px + Qy + \text{etc.}) = (n+1)(Pdx + Qdy + \text{etc.}).$$

A part le cas de $n = -1$, cela permet d'écrire immédiatement l'intégrale de toute différentielle homogène exacte.

. Lorsque dans l'équation différentielle

$$Pdx + Qdy = 0,$$

:tions P, Q des variables x, y sont homogènes et du legré, ces variables se séparent facilement, et par con- l'équation devient immédiatement intégrable. En sant $y=xt$, les fonctions P,Q prennent alors la forme ; p,q étant des fonctions de t seule, et n désignant e des exposants de x et y dans les termes de l'équa- osée. Cette équation devient donc

$$- qt)dx + qxdt = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dx}{x} + \frac{qdt}{p+qt} = 0,$$

grale est

$$lx + \int dt \frac{q}{p+qt} = const.$$

le on devra, après avoir effectué l'intégration qui , remplacer t par sa valeur $\frac{y}{x}$.

pour exemple l'équation

$$(x - 2y)dx + ydy = 0.$$

t, elle devient

$$\frac{dx}{x} + \frac{tdt}{1 - 2t + t^2} = 0,$$

est

$$lx + l(1 - t) + \frac{1}{1-t} = A,$$

nte arbitraire. En mettant pour t sa valeur

$\frac{y}{x}$, on a

$$l(x-y)+\frac{x}{x-y}=\mathrm{A},$$

qui peut s'écrire

$$x-y=a.e^{-\frac{x}{x-y}},$$

a étant une autre constante.

401. Soit encore l'équation

$$(x^2+xy-2y^2)dx+(y^2-3x^2)dy=0.$$

Elle devient, en faisant $y=xt$,

$$\frac{dx}{x}+\frac{(t^2-3)dt}{t^3-2t^2-2t+1}=0.$$

Par les méthodes exposées à l'article XXIV, on trouve,

$$\frac{t^2-3}{t^3-2t^2-2t+1}=-\frac{2}{5(t+1)}+\frac{7-\sqrt{5}}{5(2t-3-\sqrt{5})}+\frac{7+\sqrt{5}}{5(2t-3+\sqrt{5})};$$

ce qui change l'équation ci-dessus, en

$$\frac{dx}{x}-\frac{2}{5}\frac{dt}{t+1}+\frac{7-\sqrt{5}}{5}\frac{dt}{2t-3-\sqrt{5}}+\frac{7+\sqrt{5}}{5}\frac{dt}{2t-3+\sqrt{5}}=0,$$

dont l'intégrale est

$$lx-\frac{2}{5}l(t+1)+\frac{7}{10}l(t^2-3t+1)+\frac{1}{2\sqrt{5}}l\frac{2t-3+\sqrt{5}}{2t-3-\sqrt{5}}=l\mathrm{A}.$$

Cette équation peut s'écrire,

$$(y+x)^{-\frac{2}{5}}(y^2-3yx+x^2)^{\frac{7}{10}}\left(\frac{2y-3x+x\sqrt{5}}{2y-3x+x\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{5}}}=\mathrm{A}.$$

2. Puisque, après avoir fait $y = xt$ dans l'équation

$$Pdx + Qdy = 0 ,$$

sée homogène, et n marquant le degré commun des ns P, Q, il vient

$$(px^n + qx^n t)dx + qx^{n+1} dt = 0,$$

ariables se séparent en divisant par $x(px^n + qx^n t)$, il le ce qui a été dit n° 395, que le facteur par lequel n précédente doit être multipliée pour devenir inté- t $\frac{1}{x(px^n + qx^n t)}$ (en remplaçant t par sa valeur), c'est- $\frac{1}{+Qy}$. Ainsi la fonction $\frac{Pdx + Qdy}{Px + Qy}$ sera nécessai- e différentielle exacte. C'est ce que l'on peut aisé- ier, en ayant égard aux propriétés des fonctions ;.

s l'exemple du n° 400, l'équation proposée

$$(x - 2y)dx + ydy = 0$$

tégrable, d'après ce qui précède, en la multipliant $\frac{}{x + y^2}$, qui revient à $\frac{1}{(x - y)^2}$. En effet, l'équa-

$$\frac{(x-2y)dx + ydy}{(x-y)^2} = 0,$$

$$\frac{dx - dy}{x - y} + \frac{dx}{x - y} - \frac{x(dx - dy)}{(x-y)^2} = 0,$$

t le vérifier en réduisant tous les termes au ıteur), ou bien

$$d.l(x-y)+d\left(\frac{x}{x-y}\right)=0,$$

d'où l'on déduit immédiatement l'intégrale trouvée ci-dessus.

Équations du premier ordre dans lesquelles se trouvent la seconde puissance ou les puissances supérieures du coefficient différentiel.

404. Lorsque l'équation différentielle contient les puissances supérieures du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, on peut la concevoir résolue algébriquement par rapport à ce coefficient considéré comme l'inconnue. Si l'on égale ensuite à zéro les facteurs correspondants à chacune des racines, on aura autant d'équations différentielles dans lesquelles $\frac{dy}{dx}$ ne sera plus qu'au premier degré, et dont on pourra prendre les intégrales qui seront complétées chacune par une constante arbitraire. Le produit de ces diverses intégrales donnera l'intégrale générale de l'équation proposée. D'ailleurs, on ne diminue point la généralité de cette intégrale en admettant que ce soit la même constante arbitraire qui entre dans tous ces facteurs. D'où l'on voit que toute équation différentielle du premier ordre, dans laquelle entre la puissance n du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, a pour intégrale une équation primitive, où la constante arbitraire est élevée à la puissance n.

On a donné, n° 382, un exemple d'une équation de cette espèce.

405. Souvent la résolution algébrique de l'équation proposée n'est pas possible, et par conséquent le procédé qui

nt d'être indiqué, ne peut être appliqué. On parvient quelfois à intégrer une équation du genre de celles dont il ;it en la mettant d'abord sous la forme

$$y = \mathrm{L},$$

ésignant une fonction de x et de $\frac{dy}{dx}$, que nous déerons pour abréger par y'. Si ensuite l'on différencie, il dra

$$y' = \frac{d\mathrm{L}}{dx} + \frac{d\mathrm{L}}{dy}\frac{dy'}{dx},$$

tion différentielle du premier ordre entre y' et x. Si elle être intégrée, on obtiendra une équation entre y' et x une constante arbitraire; et en éliminant ensuite y' cette équation et la proposée, on obtiendra l'intégrale ıée.

. La méthode dont il s'agit s'applique à l'équation

$$y = \mathrm{M}x + \mathrm{N},$$

' désignant des fonctions quelconques de $\frac{dy}{dx}$ ou y'. En :ette équation donne

$$dy = \mathrm{M}dx + x\frac{d\mathrm{M}}{dy'}dy' + \frac{d\mathrm{N}}{dy'}dy',$$

t s'écrire (puisque $dy = y'dx$)

$$(\mathrm{M} - y')dx + x\frac{d\mathrm{M}}{dy'}dy' + \frac{d\mathrm{N}}{dy'}dy' = 0,$$

e dans la forme de l'équation considérée nos 385 et premier membre deviendra donc intégrable en multi-

pliant par le facteur $\frac{1}{M-y'}\, e^{\int \frac{dM}{M-y'}}$, et son intégrale sera

$$x+e^{-\int \frac{dM}{M-y'}}.\left(\int \frac{dN}{M-y}.e^{\int \frac{dM}{M-y'}}+A\right)=0,$$

A étant la constante arbitraire. Il restera à éliminer y entre cette équation et la proposée.

407. Le cas où $M=y$, en sorte que l'équation proposée est

$$y=y'x+N,$$

a été remarqué. On a alors en différenciant

$$\left(x+\frac{dN}{dy'}\right)dy'=0,$$

équation à laquelle on peut également satisfaire en posant

$$x+\frac{dN}{dy'}=0, \qquad \text{et} \qquad dy'=0.$$

L'équation $x+\frac{dN}{dy'}=0$ donnera une valeur de y' qui, étant substituée dans la proposée, conduira à une équation primitive : mais cette équation, qui ne contient pas de constante arbitraire, sera une solution particulière, conformément à ce qui a été dit n° 379. L'équation $dy=0$ donne en l'intégrant

$$y'=A,$$

A étant la constante arbitraire : cette valeur mise dans la proposée à la place de y' donnera l'intégrale générale cherchée. Cette intégrale est l'équation d'une ligne droite dont la valeur attribuée à la constante A détermine l'inclinaison sur l'axe des x.

lutions particulières des équations différentielles du premier ordre à deux variables.

108. On a remarqué n° 379, qu'il existait quelquefois des ıations primitives (sans constante arbitraire) qui satisfont ne équation différentielle $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, et qui néan- ins ne sont point comprises dans son *intégrale générale.* équations dont il s'agit, appelées *solutions particulières,* istinguent ainsi des *intégrales particulières* qui répondent diverses valeurs de la constante arbitraire dont la présence e caractère essentiel de l'intégrale générale. Comme il est de les trouver lorsqu'elles sont de la forme $x = c$, je ›oserai dans ce qui va suivre qu'elles contiennent la tion y.

›it

$$y = \varphi(x, a). \ldots\ldots \qquad (1)$$

:grale générale de l'équation différentielle

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \ldots\ldots \qquad (2)$$

dernière équation sera le résultat de l'élimination de nstante a entre l'équation (1) et sa différentielle immé- , qui est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{dx};$$

ıformément à ce qui a été exposé dans les n°s 376 et ıts, nous regardons les équations (1) et (2) comme ap- ıant au système d'une infinité de lignes courbes qui ent seulement les unes des autres par les diverses va- que l'on peut attribuer à la constante a.

Cela posé, admettons que l'on ait donné dans l'équation (1) à la constante a une valeur déterminée, et considérons la courbe correspondante à cette valeur. Si, à partir de la valeur dont il s'agit, a augmente de la quantité infiniment petite da, l'équation (1) deviendra

$$y = \varphi + \frac{d\varphi}{da} da.$$

Cette dernière équation appartiendra à une seconde courbe infiniment voisine de la première; et les valeurs de x, y qui satisferont simultanément aux deux équations

$$y = \varphi, \qquad \text{et} \qquad y = \varphi + \frac{d\varphi}{da} da,$$

ou si l'on veut aux deux équations

$$y = \varphi, \qquad \text{et} \qquad \frac{d\varphi}{da} = 0,$$

appartiendront au point d'intersection de ces deux courbes.

409. Admettons maintenant que l'on élimine la constante a entre les deux équations

$$y = \varphi, \qquad \text{et} \qquad \frac{d\varphi}{da} = 0.$$

Le résultat de cette élimination sera une équation primitive entre x et y appartenant à la ligne qui est le lieu des points d'intersection de toutes les courbes comprises dans l'intégrale générale, et qui correspondent aux diverses valeurs de la constante a. Cette ligne est évidemment touchée par toutes les courbes dont il s'agit, et elle en forme l'enveloppe. L'équation obtenue de cette manière, et qui ne contient pas de constante arbitraire, donne la solution particulière de l'équation $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, à laquelle elle doit satisfaire, puisque la

ur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'un quelconque des points de l'enveloppe commune à cette enveloppe et à la courbe comprise dans égrale générale qui la touche en ce point.

au lieu de l'équation (1), on n'avait que l'équation non lue

$$F(x, y, a) = 0,$$

onsidérerait que cette équation devant être vérifiée par $\varphi(x, a)$, on en déduira $\frac{dy}{da}$ ou $\frac{d\varphi}{da}$ par la méthode pour entier les fonctions implicites, laquelle donne

$$\frac{dF}{da} + \frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{da} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{da} = -\frac{dF}{da} : \frac{dF}{dy}.$$

, donc alors remplacer les deux équations

$$y = \varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{d\varphi}{da} = 0$$

lles-ci

$$F = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dF}{da} : \frac{dF}{dy} = 0,$$

dernière peut être réduite à $\frac{dF}{da} = 0$ quand F ne con- radicaux, ni dénominateurs.

ıt remarquer d'ailleurs, que les courbes représentées ı équation différentielle et par son intégrale générale, lire les courbes correspondantes aux intégrales parti- , n'ont pas toujours une enveloppe ; ou qu'il n'arrive ours que ces courbes soient successivement tangen- ıe certaine ligne fixe. Alors la solution particulière pas. Il peut se faire aussi que l'équation de l'en-

veloppe soit comprise dans l'intégrale générale et forme une intégrale et non une solution particulière. On reconnaît qu'il n'existe pas de solution particulière lorsque l'équation $\frac{d\varphi}{da} = 0$ ne peut donner pour la constante a une valeur exprimée en x; ou plus exactement lorsqu'on ne peut déduire des équations $y = \varphi$ et $\frac{d\varphi}{da} = 0$, par l'élimination de a, une équation entre x et y qui ne rentre pas dans l'intégrale générale et n'en soit pas un cas particulier.

410. Il est facile de reconnaître directement que la recherche de la solution particulière, c'est-à-dire d'une équation qui, sans provenir d'une valeur particulière attribuée à la constante a de l'intégrale générale, satisfait cependant à l'équation différentielle (2), doit s'opérer par l'élimination de a entre l'équation (1) et l'équation $\frac{d\varphi}{da} = 0$. En effet, tout se réduit, pour trouver l'équation dont il s'agit, à mettre à la place de a, dans l'équation (1), une fonction de x, convenablement déterminée, et telle que $\varphi(x, a)$ devienne la valeur de y qu'offre la solution particulière. Or, supposons que cette substitution ait été faite, et regardons a comme une fonction de x. L'équation différentielle déduite immédiatement de l'équation (1) sera alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{da}\frac{da}{dx}.$$

Mais l'équation (2) résulte, par hypothèse, de l'élimination de a, supposée constante, entre l'équation (1) et son équation différentielle, qui est alors $\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}$. Donc il suffit, pour obtenir le même résultat, a étant supposée variable

t fonction de x, de déterminer cette fonction a par la ondition de faire disparaître le terme $\frac{d\varphi}{da}\frac{da}{dx}$; car les deux équations entre lesquelles l'élimination s'opérera étant les mêmes dans les deux cas, l'équation (2) qui en résultera sera aussi la même. On peut faire disparaître ce terme en posant $\frac{d\varphi}{dx}=0$, ce qui donne a égale à une constante quelconque et répond au cas de l'intégrale générale; ou en posant $\frac{d\varphi}{da}=0$, ce qui donnera pour a une fonction de x, qui étant substituée dans l'équation (1) ou $y=\varphi$, conduira à une équation primitive sans constante arbitraire, et satisfaisant à l'équation différentielle, qui sera par conséquent la solution particulière demandée.

411. D'après ce qui précède, on peut obtenir la solution particulière quand on connaît l'intégrale générale. Cette solution particulière peut être aussi déduite de l'équation différentielle. Considérons l'une des courbes comprises dans l'intégrale générale et correspondante à une valeur a de la constante. Cette courbe sera à la fois coupée et touchée par la courbe contiguë correspondante à la valeur $a+da$, dans un des points de l'enveloppe dont la solution particulière est l'équation. Or, cette même courbe correspondante à la valeur a de la constante n'est plus touchée, mais est coupée par les autres courbes correspondantes aux valeurs de la constante qui diffèrent de a d'une quantité finie. Il suit de là que l'équation différentielle

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0,$$

étant résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, donnera généralement deux

ou plusieurs valeurs différentes pour ce coefficient différentiel, si l'on attribue à x et y des valeurs quelconques. Mais si l'on attribue à x et y les valeurs qui appartiennent aux points de l'enveloppe, ou à la solution particulière qui représente cette enveloppe, il y aura au moins deux des valeurs de $\frac{dy}{dx}$ qui deviendront égales entre elles. Ainsi la solution particulière doit offrir ce double caractère; 1° de satisfaire à l'équation différentielle proposée

$$f(x, y, y') = 0,$$

$\left(\text{en écrivant pour abréger } y' \text{ au lieu de } \frac{dy}{dx}\right)$; 2° de rendre égales au moins deux des valeurs de y' qui satisfont à cette équation. Or, l'existence de deux ou plusieurs valeurs égales de y' données par l'équation précédente est exprimée en général par la condition

$$\frac{df}{dy'} = 0:$$

d'où l'on conclut qu'en éliminant y' entre les deux équations

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{df}{dy'} = 0,$$

on obtiendra, si elles existent, les solutions particulières demandées.

412. On trouvera encore la solution particulière de la manière suivante. Supposons que l'équation différentielle proposée $f(x, y, y') = 0$ ayant été résolue par rapport à y', on lui ait donné la forme suivante

$$y' + V = 0,$$

V étant une fonction de x, y. Puisque les courbes qui sont re-

ésentées par les intégrales particulières se coupent géné-
ement, et se touchent en même temps qu'elles se coupent
ılement dans les points qui appartiennent à l'enveloppe,
voit que la fonction —V qui donne la valeur de y' doit
ɔrésenter généralement au moins deux valeurs différentes
ur cette quantité; mais que si l'on attribue à x et y les
leurs qui appartiennent à l'enveloppe, les deux valeurs de
ɛte même fonction —V deviendront égales entre elles.
après cela nous pouvons nous représenter —V comme
rdonnée verticale d'une surface dont les abscisses horizon-
es seraient x et y; et cette surface doit avoir une figure
le que l'ordonnée verticale la coupant en général au moins
ıns deux points, elle la rencontre en un seul point, lorsque
s abscisses x et y appartiennent à la solution particulière.
en résulte que la surface dont il s'agit doit être touchée par
cylindre vertical qui aurait pour base l'enveloppe, ou la
ɔurbe représentée par la solution particulière; et il est aisé
en conclure que, pour les valeurs x et y qui appartiennent
cette solution, on doit avoir à la fois

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{0}, \qquad \frac{dV}{dy} = \frac{1}{0};$$

ɛ par conséquent

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{0}, \qquad \frac{dy'}{dy} = \frac{1}{0}.$$

'expression de ces conditions donnera donc la solution par-
culière s'il en existe une.

413. On peut remarquer d'ailleurs, qu'en différenciant l'é-
uation proposée

$$f(x, y, y') = 0,$$

n a

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dx} = 0.$$

Mais le coefficient du dernier terme étant nul, d'après le n° précédent, pour les valeurs de x, y qui appartiennent à la solution particulière, ce terme disparaît, d'où il suit que la valeur du coefficient du second ordre $\frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ demeure indéterminée; et il en sera de même des coefficients de tous les ordres supérieurs. Cette circonstance résulte de ce que chacun des points de l'enveloppe appartient à trois courbes différentes qui ont entre elles un contact du premier ordre, et pour lesquelles le coefficient du premier ordre $\frac{dy}{dx}$ a une valeur commune; savoir les deux courbes données par les intégrales particulières qui répondent aux valeurs $a + da$ de la constante arbitraire, et l'enveloppe elle-même qui est également comprise dans l'équation différentielle. Mais les valeurs des coefficients différentiels des ordres supérieurs sont généralement différentes pour ces diverses courbes; et comme les équations dont ces coefficients dépendent ne pourraient donner qu'une seule valeur, l'analyse résout cette difficulté en laissant cette valeur indéterminée. Ayant ainsi déduit de l'équation différentielle proposée l'expression de $\frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, et égalant séparément à zéro le numérateur et le dénominateur de cette expression, on aura deux équations contenant y' qui doivent subsister en même temps que la proposée pour les valeurs de x, y' qui appartiennent à la solution particulière. Si l'on élimine y' entre chacune de ces équations et la proposée, et si les résultats de cette élimination ont un facteur commun, ce facteur sera la solution particulière cherchée. Si ces résultats ne peuvent subsister ensemble, on en conclura qu'il n'existe pas de solution particulière.

applique ce qui précède à l'équation différen-

$$x\frac{dy}{dx}-y+b=0,$$

' 380, et qui a pour intégrale générale

$$y-ax-b=0,$$

onstante arbitraire, on trouvera pour la solution le système des valeurs $x=0$, $y=b$ qui appar- point d'intersection commun de toutes les droites es par l'intégrale générale.

ais si l'on traite de la même manière l'équation

$$\frac{dy}{dx}-a-2x=0,$$

ée n° 381, qui a pour intégrale générale

$$y-ax-x^2+b=0,$$

la constante arbitraire, on ne trouvera aucun ré- En effet il ne peut y avoir ici de solution particulière, e les courbes représentées par ces équations n'ont enveloppe. Il en est de même à l'égard de l'équation 382.

3. Considérons l'équation

$$y=ax+b,$$

appartient à une ligne droite dont la position est déter- ée par les valeurs des constantes a et b. La distance cette ligne à l'origine des coordonnées a pour valeur

$\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}$; par conséquent, si l'on élimine b entre l'équation précédente et l'équation

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+1}} = r,$$

(dans laquelle r désigne une constante), l'équation résultante

$$y = ax + r\sqrt{a^2+1},$$

appartiendra à toutes les lignes droites qui touchent le cercle dont le rayon est r, et dont le centre est à l'origine des coordonnées.

Si l'on différencie cette équation, et si l'on élimine la constante a au moyen de l'équation différentielle, il viendra en écrivant y' au lieu de $\frac{dy}{dx}$,

$$y = xy' + r\sqrt{y'^2+1}.$$

On conclura de tout ce qui a été exposé précédemment que cette équation différentielle a pour intégrale l'équation primitive

$$y = ax + r\sqrt{a^2+1},$$

dans laquelle a est la constante arbitraire, et qui représente, aussi bien que l'équation différentielle, le système de toutes les lignes droites tracées à la distance r de l'origine des coordonnées, et de plus qu'elle a pour solution particulière l'équation

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

qui appartient au cercle touché par toutes ces lignes droites, et qui est le lieu de leurs intersections.

ɔi l'équation différentielle

$$y = xy' + r\sqrt{y'^2+1}$$

ée, on remarquerait en premier lieu qu'elle le cas du n° 407. On trouve immédiatement, ui a été dit dans ce numéro, $y = ax + r\sqrt{a^2+1}$ rale générale. De plus le facteur $x + \frac{dN}{dy'}$ de- $+ \frac{ry'}{\sqrt{y'^2+1}}$. En l'égalant à zéro on en déduit la $- \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, et cette valeur étant substituée dans lifférentielle proposée, donne $y = \sqrt{r^2-x^2}$ qui on particulière.

ɔrmément au n° 409, on veut déduire la solution de l'intégrale générale

$$y = ax + r\sqrt{a^2+1},$$

liminer a entre cette équation et sa dérivée prise t à a, qui est

$$0 = x + \frac{ra}{\sqrt{a^2+1}}.$$

de cette élimination est évidemment le même qui ɜ obtenu.

rès le n° 411, on veut déduire la solution particu- quation différentielle, on deva éliminer y' entre les tions

$$y' - r\sqrt{y'^2+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad x + \frac{ry'}{\sqrt{y'^2+1}} = 0,$$

ce qui donne encore le même résultat.

D'après le principe énoncé n° 413, il faudrait différencier l'équation proposée

$$y - xy' - r\sqrt{y'^2+1} = 0$$

pour en déduire la valeur de y'', ce qui donne

$$xy'' + \frac{ry'y''}{\sqrt{y'^2+1}} = 0.$$

Cette équation, dans le cas particulier que nous considérons, ne donne pas une expression générale de y'' en x, y et y', parce que la valeur de y'' est toujours nulle pour les intégrales particulières, qui représentent ici des lignes droites. Mais elle se décompose dans les deux facteurs

$$y'' = 0 \qquad \text{et} \qquad x + \frac{ry'}{\sqrt{y'^2+1}} = 0,$$

dont l'un appartient à l'intégrale générale et l'autre à la solution particulière.

Enfin si, conformément au n° 412, on résout l'équation différentielle proposée par rapport à y' pour la mettre sous la forme $y' + V = 0$, on trouvera

$$y' + \frac{xy \pm r\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r^2-x^2} = 0.$$

On voit que cette équation donne en général pour y' deux valeurs différentes, appartenant aux deux tangentes au cercle qui se croisent dans le point déterminé par les valeurs attribuées à x et y. Mais ces valeurs de y' deviendront égales si le radical de l'équation précédente est nul, c'est-à-dire si

sfont à l'équation

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

par conséquent la solution particulière. La condi-
rend égales les deux valeurs de y' est ici évidente :
érifier que cette même condition résulterait égale-
a supposition de $\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{0}$ ou $\frac{dy'}{dy} = \frac{1}{0}$.

'équation différentielle que l'on vient de considérer
particulier de l'équation

$$y = xy' + N$$

7, dans laquelle N est une fonction quelconque
est clair par ce qui précède que l'intégrale générale
quation appartient à un système de lignes droites
quations se déduisent de la proposée, en y rempla-
r une constante arbitraire. De plus toutes ces lignes
uchent la courbe dont on obtient l'équation en éli-
entre les deux équations suivantes

$$y = xy' + N, \qquad \text{et} \qquad x + \frac{dN}{dy'} = 0.$$

uant à l'équation considérée n° 406,

$$y = Mx + N,$$

ielle M et N sont des fonctions quelconques de y'
ntégrale générale a été donnée dans ce numéro.
n particulière, c'est-à-dire l'équation de la courbe
ar toutes les courbes correspondantes aux intégrales
res, s'obtiendra en éliminant y' entre les équations

$$y = Mx + N \qquad \text{et} \qquad e^{-\int \frac{dM}{M-y'}} = 0,$$

dont la dernière revient à $\int \frac{dM}{M-y'} = \frac{1}{0}$.

419. Il est quelquefois utile de savoir tracer un système de courbes d'une espèce donnée d'après la condition qu'elles soient toutes tangentes à une autre courbe également donnée. Ce problème revient à déterminer une équation primitive, dont on donne la forme générale, de manière que son équation dérivée ait pour solution particulière une équation déterminée. Soit généralement

$$F(x, y, a, b, \text{etc.}) = 0,$$

une équation dans laquelle a, b, etc., sont des constantes. On demande que le système des courbes qui pourraient être données par cette équation en faisant varier les constantes, touche ou ait pour enveloppe la courbe représentée par l'équation

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Différentiant les deux équations proposées on trouve

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy}\frac{dy}{dx} = 0;$$

et en éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre ces deux équations, l'équation résultante, qui est

$$\frac{dF}{dx}\frac{d\Phi}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{d\Phi}{dx} = 0,$$

exprime la condition que les courbes représentées par les

; proposées aient un contact du premier ordre. Si
ine donc x et y entre les trois équations

$$\text{), etc.)} = 0, \quad \Phi(x, y) = 0, \quad \frac{dF}{dx}\frac{d\Phi}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{d\Phi}{dx} = 0,$$

;, qui sera une équation entre les constantes a, b, etc.,
a la relation qui doit subsister entre a et les autres
s pour que la condition dont il s'agit soit satisfaite.
sout donc cette dernière équation par rapport à l'une
s constantes, telle que b, et que l'on mette sa valeur
ıation proposée

$$F(x, y, a, b, \text{etc.}) = 0,$$

t de cette élimination aura la propriété demandée.
oit donnée, par exemple, l'équation

$$y^2 + ax + b = 0,$$

ınt à une parabole dont le grand axe coïncide avec
x; et l'équation

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

nt à un cercle dont le centre est à l'origine des
ées et dont r représente le rayon. On demande de
r les paraboles représentées par la première équa-
nanière qu'elles soient toutes tangentes à ce cercle.
ınt les équations précédentes, on a

$$2yy' + a = 0, \qquad \text{d'où} \qquad 2x - a = 0.$$
$$2x + 2yy' = 0,$$

. x et y entre les trois équations

$$+ ax + b = 0, \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad 2x - a = 0,$$

ou trouve la relation

$$r^2 + \frac{a^2}{4} + b = 0, \qquad \text{d'où} \qquad b = -\frac{a^2}{4} - r^2.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation $y^2 + ax + b = 0$, la change en

$$y^2 + ax - \frac{a^2}{4} - r^2 = 0,$$

qui aura la propriété demandée.

En effet, si l'on applique à cette équation la règle du n° 404, pour obtenir la solution particulière de l'équation dérivée dont elle serait l'intégrale, on devra éliminer la constante arbitraire a entre les deux équations

$$y^2 + ax - \frac{a^2}{4} - r^2 = 0, \qquad \text{et} \qquad 2x - a = 0;$$

ce qui donnera pour cette solution particulière

$$y^2 + x^2 - r^2 = 0.$$

La dérivée de l'équation

$$y^2 + ax - \frac{a^2}{4} - r^2 = 0,$$

se trouve d'ailleurs en différentiant par rapport à x, ce qui donne

$$2yy' + a = 0;$$

puis en éliminant la constante a entre cette équation et la différentielle. On obtient ainsi l'équation dérivée

$$y^2 - 2xyy' - y^2y'^2 - r^2 = 0,$$

à laquelle on peut appliquer les règles des n°s 411 et suivants.

, on la résout par rapport à y', il vient

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{y^2+x^2-r^2}}{y}.$$

exprimera l'égalité des deux valeurs de y, olution particulière, est donc

$$y^2 + x^2 - r^2 = 0.$$

érons encore l'équation

$$z = x \text{ tang. } \theta - x^2 \frac{g}{2V^2 \cos.^2\theta}.$$

t à la trajectoire d'un projectile lancé dans le ant varier l'angle de projection θ, on obtient ɔes ayant une enveloppe dont l'équation se trou- ıément au n° 409, en différentiant par rapport ɔnne

$$0 = 1 - \frac{gx}{V^2} \text{ tang. } \theta ;$$

ınant θ entre cette dernière equation et la pré- trouvera ainsi pour l'équation cherchée

$$x^2 = \frac{V^2}{g^2}(V^2 - 2gz).$$

tangente à toutes les trajectoires est donc une ɔnt l'axe est vertical, et dont le sommet est à la

au-dessus de l'origine.

XXXIII. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A DEUX VARIABLES DU SECOND ORDRE ET DES ORDRES SUPÉRIEURS.

422. Une équation différentielle du second ordre a généralement la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 :$$

x est la variable indépendante, y une autre variable dont la valeur dépend de celle de x au moyen de la relation établie par cette équation.

On peut faire sur l'équation dont il s'agit, des remarques analogues à celles qui ont été faites dans le n° 376. Considérons x comme l'abscisse et y comme l'ordonnée d'une courbe. Si l'on voulait construire la courbe à laquelle appartient l'équation précédente, on la supposerait résolue par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$, dont la valeur se trouvera donnée en fonction de x, y et $\frac{dy}{dx}$. On fixerait ensuite arbitrairement les valeurs de x et y, c'est-à-dire un point quelconque par lequel on voudra faire passer la courbe. On fixerait de plus arbitrairement la valeur de $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire l'inclinaison que la courbe devra avoir en ce point. L'équation proposée donnera alors une valeur déterminée pour $\frac{d^2y}{dx^2}$, au moyen de laquelle le tracé de la courbe dont il s'agit pourra être effectué. En effet, faisant varier x d'une quantité très-petite Δx, on obtiendra approximativement les valeurs des coordonnées d'après le tableau suivant :

sses.	Ordonnées correspondantes.
	y
x	$y+\frac{dy}{dx}\Delta x$
$x+\Delta x$	$y+\frac{dy}{dx}\Delta x+\left(\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x\right)\Delta x.$

onc construire la courbe avec une exactitude grande que les variations Δx seront prises plus i, l'équation proposée exprime une propriété ıne infinité de courbes que nous concevons tra- plan. Elle détermine la figure de ces courbes st donné un point par lequel elles doivent passer, n de la tangente en ce point. Cette équation doit ɜ comme ayant une signification plus étendue que ı premier ordre, puisqu'il ne suffit plus ici pour a courbe de se donner un de ses points; il faut ɔnner la direction de la tangente en ce point.

'ailleurs, que le choix entre l'une quelconque des peuvent être représentées par l'équation pro- ɲd ici de deux quantités arbitraires dont l'une ıit y, et l'autre $\frac{dy}{dx}$, quand on se serait donné x.

ıtégrale générale de l'équation du second ordre ɜvant offrir la même généralité que cette équa- évidemment contenir deux constantes arbitraires. te intégrale devra satisfaire à l'équation différen- ısée. Ces conditions suffisent pour que l'intégrale ɜntielle représentent toutes deux le même système

ısidérons en général une équation primitive

$$F(x, y, a, b) = 0$$

dans laquelle a et b sont deux constantes et où nous regardons y comme une fonction de x. On pourra parvenir à son équation dérivée du second ordre de plusieurs manières différentes : 1° en différentiant deux fois de suite par rapport à x, puis éliminant entre cette équation et ses deux différentielles les constantes a et b; 2° en différentiant une fois, puis éliminant successivement a et b entre l'équation primitive et son équation différentielle du premier ordre. On obtiendrait ainsi deux équations différentielles du premier ordre différentes l'une de l'autre, dont chacune ne contiendrait qu'une constante arbitraire. Si l'on différentie ensuite chacune de ces équations, et si l'on élimine la constante qu'elle contient au moyen de la différentielle que l'on aura obtenue, elles conduiront toutes deux à la même équation du second ordre, qui ne différera point de celle que l'on aura trouvée par le premier procédé.

En effet, l'équation primitive $F(x, y, a, b,) = 0$ doit être considérée comme représentant un double système de courbes; savoir les courbes que l'on trouverait en faisant varier a, b demeurant constante, et les courbes que l'on trouverait en faisant varier b, a demeurant constante. Chacune des équations dérivées du premier ordre dans laquelle une des constantes a disparu, répond séparément à l'un de ces systèmes. Quant à l'équation unique du second ordre, où aucune des deux constantes ne se trouve, elle appartient également aux deux systèmes de courbes, et exprime une propriété qui leur est commune.

425. Soit par exemple l'équation primitive

$$y^2 + ay + bx = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

qui appartient à une parabole ayant son axe parallèle à l'axe des x, et passant par l'origine des coordonnées. En faisant

emeurant constante, on changera à la fois la and axe et le paramètre, et en faisant varier b, la constante, on changera seulement le para-tion différentielle du premier ordre est (en écri-éger y' et y'' au lieu de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$)

$$2yy'+ay'+b=0\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

nt successivement a et b entre cette équation et imitive, on obtient les deux équations du pre-

$$y^2y'+b(y-xy')=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
$$y^2-2xyy'+a(y-xy')=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

nnent respectivement aux deux systèmes de pa-on vient de parler.

ntiant l'équation (3) on a

$$2yy'^2+y^2y''-bxy''=0\,;$$

nant b entre cette équation et l'équation (3), il 'équation du second ordre

$$y^2y''+2yy'^2-2xy'^3=0. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

entiant l'équation (4), on a

$$2y'^2+2yy''+ay''=0\,;$$

nant a entre entre cette équation et l'équation (4), e l'équation du second ordre (5).

on primitive et ses deux différentielles sont

$$y^2+ay+bx=0\,,$$
$$2yy'+ay'+b=0\,,$$
$$2y'^2+2yy''+ay''=0.$$

Et en éliminant à la fois a et b entre ces trois équations, on retrouve également l'équation du second ordre (5). Cette équation, dans laquelle les deux constantes a et b ont disparu, exprime une relation qui subsiste pour l'une quelconque des courbes paraboliques que peut représenter l'équation (1), quand on y donne à ces constantes toutes les valeurs possibles.

Les équations (3) et (4), contenant chacune une constante arbitraire, sont les deux intégrales du premier ordre, ou *intégrales premières* de l'équation (5). L'équation (1) contenant deux constantes arbitraires est l'*intégrale seconde* de cette même équation. Si l'on élimine y' entre les deux équations (3) et (4), on retrouve l'équation (1).

426. En général, si l'on obtient par un moyen quelconque, deux équations différentielles du premier ordre satisfaisant à une équation différentielle du second ordre proposée, et contenant chacune une constante qui n'entre pas dans cette dernière équation, on obtiendra, par l'élimination de y' ou $\frac{dy}{dx}$ entre les deux équations dont il s'agit, une équation primitive contenant deux constantes arbitraires, qui satisfera nécessairement à l'équation proposée, et en sera l'intégrale générale.

427. Les notions qui viennent d'être exposées s'appliquent évidemment aux équations différentielles d'un ordre quelconque. Une équation différentielle de l'ordre n a toujours n intégrales de l'ordre immédiatement inférieur, qui contiennent chacune une constante arbitraire différente. Toutes ces constantes doivent se retrouver dans l'intégrale générale, si l'on veut que cette équation ait la même généralité que l'équation différentielle proposée. En effet, une équation primitive et ses différentielles successives jusqu'à l'ordre n donnent $n+1$,

ıuations au moyen desquelles n constantes arbitraires ·uvent être éliminées. Si l'on connaissait les n intégrales emières de l'équation proposée, on pourrait en déduire ıtégrale $n^{ième}$, ou l'équation primitive, en éliminant entre ; n intégrales les $n-1$ coefficients différentiels, y', y'', y''' ...$y^{(n-1)}$.

Ces notions paraîtront encore plus évidentes en considérant ormule de Taylor,

$$y = y_0 + x\frac{dy_0}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2y_0}{dx^2} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y_0}{dx^3} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^4y_0}{dx^4} + \text{etc.},$$

donne le développement de la fonction y en série ordon- suivant les puissances entières de la variable x, au moyen valeurs de cette fonction et de ses coefficients différentiels ·orrespondent à $x = 0$. Soit une équation différentielle de re n,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

nous supposons ici que dépend la fonction y. On dé- de cette équation différentielle l'expression de $\frac{d^ny}{dx^n}$ en on de $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$; et par suite les sions des coefficients différentiels des ordres plus élevés. es valeurs de $\frac{d^ny_0}{dx^n}, \frac{d^{n+1}y_0}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2}y_0}{dx^{n+2}}$, etc., seront connues ·tion des valeurs de $y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}, \frac{d^3y_0}{dx^3}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$. Si bstitue donc ces valeurs dans l'expression générale n obtiendra une relation entre x et y qui sera le déve- ent en série infinie de l'intégrale générale de l'équa- férentielle proposée, et dans laquelle ces dernières

quantités, qui sont en nombre n, demeureront entièrement arbitraires.

428. Remarquons de plus que la formule de Taylor donne, en y faisant $h = -x$,

$$y_0 = y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} - \text{etc.},$$

et que si on l'applique aux fonctions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., on aura également

$$\frac{dy_0}{dx} = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^2}{2}\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^5y}{dx^5} - \text{etc.},$$

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{d^3}{dx^3} + \frac{x^2}{2}\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^5y}{dx^5} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^6y}{dx^6} - \text{etc.},$$

$$\frac{d^3y_0}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3} - x\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{x^2}{2}\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^6y}{dx^6} + \frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^7y}{dx^7} - \text{etc.}$$

Or, l'équation différentielle proposée étant de l'ordre n, donnera $\frac{d^ny}{dx^n}$ et tous les coefficients différentiels des ordres plus élevés en fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. En substituant leurs valeurs dans les n premières de ces équations, on aura donc, conformément à ce qui a été dit ci-dessus, n équations différentielles de l'ordre $n-1$ contenant chacune une constante arbitraire différente $y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$.

Intégration des équations différentielles les plus simples du second ordre et des ordres supérieurs.

429. Cette intégration ne peut être effectuée que dans un petit nombre de cas particuliers. Soit en premier lieu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = X,$$

une fonction de x seule. Multipliant les deux
le facteur constant dx, et intégrant, il viendra

$$\frac{dy}{dx} = X dx, \qquad \frac{dy}{dx} = A + \int X dx.$$

ıne seconde fois par dx, et intégrant de nouveau

$$dx + dx \int X dx, \quad \text{et} \quad y = B + Ax + \int dx \int X dx,$$

rale demandée, dans laquelle A et B sont les
ıntes arbitraires.
ant par partie $\int dx \int X dx$, l'expression précédente
ı s'écrire

$$y = B + Ax + x \int X dx - \int X x dx.$$

tion proposée était

$$\frac{d^3y}{dx^3} = X,$$

ait de la même manière

$$y = C + Bx + \frac{Ax^2}{2} + \int dx \int dx \int X dx;$$

veut

$$+ Bx + \frac{Ax^2}{2} + \frac{x^2}{2} \int X dx - x \int X x dx + \frac{1}{2} \int X x^2 dx,$$

ant les trois constantes abitraires, et ainsi de suite:
e de reconnaître la loi de ces expressions.

430. Soit maintenant l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P},$$

dans laquelle P désigne une fonction du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ seulement, que nous désignerons pour abréger par y'. Cette équation peut s'écrire

$$\frac{dy'}{dx} = \mathrm{P},$$

et l'on en tire d'abord

$$dx = \frac{dy'}{\mathrm{P}}, \qquad \text{et} \qquad x = \mathrm{A} + \int \frac{dy'}{\mathrm{P}}.$$

On a de plus

$$dy = y'dx = \frac{y'dy'}{\mathrm{P}} \qquad \text{et} \qquad y = \mathrm{B} + \int \frac{y'dy'}{\mathrm{P}}.$$

Éliminant y' entre ces deux équations, après avoir effectué les intégrations indiquées, on aura une équation entre x et y, qui sera l'intégrale cherchée, et dans laquelle A et B seront les deux constantes arbitraires.

On peut remarquer que si la fonction P de l'équation précédente contenait x avec y', la recherche se réduirait à intégrer l'équation $\mathrm{P}dx - dy' = 0$ entre les deux variables x et y'; et que si la fonction P contenait y avec y', il s'agirait seulement d'intégrer l'équation $\mathrm{P}dy - y'dy' = 0$ entre les deux variables y et y'.

431. Si l'on avait l'équation du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \mathrm{Q},$$

ıe fonction du coefficient différentiel du second

y'' seulement, on écrirait de même

$$\frac{dy''}{dx} = Q;$$

$$= \frac{dy''}{Q}, \qquad \text{et} \qquad x = A + \int \frac{dy''}{Q}.$$

uite

$$dx = \frac{y''dy''}{Q}, \qquad \text{et} \qquad y' = B + \int \frac{y''dy''}{Q};$$

$$dx + \frac{dy''}{Q}\int \frac{y''dy''}{Q}, \text{ et } y = C + Bx + \int \frac{dy''}{Q}\int \frac{y''dy''}{Q}.$$

ı de y'' entre cette équation et l'équation $\frac{dy''}{Q}$ donnera l'intégrale demandée, A, B, C étant stantes arbitraires.

uerait de la même manière pour les équations es ordres plus élevés.

encore l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Y,$$

ıe Y désigne une fonction de y seule. Multipliant ıtégrant, il viendra

$$\frac{d^2y}{x^2} = Ydy, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = A + 2\int Ydy;$$

'e

$$\frac{dy}{\sqrt{A + 2\int Ydy}}, \qquad \text{et} \qquad x = B + \int \frac{dy}{\sqrt{A + 2\int Ydy}},$$

pour l'intégrale demandée, dans laquelle A et B sont les deux constantes arbitraires.

433. Si l'équation proposée était

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \mathrm{P},$$

P désignant une fonction de $\frac{dy}{dx}$ ou y' seulement, on remarquerait que cette équation peut s'écrire

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = \mathrm{P},$$

et que l'on en tirera comme ci-dessus

$$dx = \frac{dy'}{\sqrt{\mathrm{A} + 2\int \mathrm{P}dy'}}, \quad \text{et} \quad x = \mathrm{B} + \int \frac{dy'}{\sqrt{\mathrm{A} + 2\int \mathrm{P}dy'}}.$$

Mais l'on a de plus

$$dy = y'dx = \frac{y'dy'}{\sqrt{\mathrm{A} + 2\int \mathrm{P}dy'}}, \text{ d'où } y' = \mathrm{C} + \int \frac{y'dy'}{\sqrt{\mathrm{A} + 2\int \mathrm{P}dy'}}.$$

En éliminant y' entre ces deux équations, on trouvera l'intégrale demandée, contenant les trois constantes arbitraires A, B, C.

434. Ce procédé s'étend facilement aux équations des ordres plus élevés, dans lesquelles le coefficient différentiel est donné en fonction seulement du coefficient différentiel de l'ordre inférieur de deux unités. Soit l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \mathrm{Q},$$

Q étant fonction de $\frac{d^2y}{dx^2}$ ou y'' seulement. Cette équation re-

$$\frac{d^2y''}{dx^2} = Q,$$

comme ci-dessus

$$\frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}}, \qquad x = B + \int \frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}}.$$

$$= \frac{y''dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}}, \qquad y' = C + \int \frac{y''dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}}.$$

$$'dx = Cdx + \frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}} \int \frac{y''dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}},$$

$$D + Cx + \int \frac{dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}} \int \frac{y''dy''}{\sqrt{A+2\int Q dy''}}.$$

de y'' entre ces deux équations donnera l'inté-
:. On remarquera que quand même cette éli-
pourrait être effectuée, ces équations donne-
ins deux valeurs correspondantes de x et y,
rairement une valeur de y''.
ır exemple l'équation très-simple

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ky,$$

ın nombre positif. L'intégrale sera, d'après

$$\int \frac{dy}{\sqrt{A+ky^2}} = B + \frac{1}{\sqrt{k}} . l\left(y\sqrt{k} + \sqrt{A+ky^2}\right),$$

it facilement (en changeant de constantes)

$$y = Ae^{-x/k} + Be^{x/k}.$$

Mais si l'on avait

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -ky,$$

il viendrait

$$x = B + \int \frac{dy}{\sqrt{A - ky^2}} = B + \frac{1}{\sqrt{k}} \text{arc sin.} y \sqrt{\frac{k}{A}};$$

d'où l'on tire

$$y = \sqrt{\frac{A}{k}} \sin. \sqrt{k}(x - B),$$

ou, ce qui revient au même (en changeant de constantes),

$$y = A \sin. x\sqrt{k} + B \cos. x\sqrt{k}.$$

Ces deux intégrales peuvent évidemment se déduire l'une de l'autre, en ayant égard aux relations des exponentielles imaginaires avec les fonctions trigonométriques.

Des facteurs propres à rendre intégrable une équation différentielle d'un ordre quelconque.

436. Soit une équation d'un ordre quelconque n, mise sous la forme

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^ny}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

et considérons une des équations de l'ordre $(n-1)$ dont on peut la déduire par l'élimination d'une constante arbitraire a. On peut supposer que l'élimination a été faite en résolvant l'équation de l'ordre $(n-1)$ par rapport à a, puis différentiant, ce qui donne une équation de l'ordre n, où $\frac{d^ny}{dx^n}$ n'entre qu'à

ıissance, mais avec un coefficient, fonction de
ivées de y jusqu'à l'ordre $(n-1)$. Il faudra divi-
ıar ce coefficient pour obtenir la forme (A). Réci-
ɔnc il existe des facteurs, fontions de x, y et des
usqu'à l'ordre $(n-1)$, qui sont tels, que le pre-
de l'équation (A) étant multiplié par l'un quel-
ɜ eux, deviendra nécessairement une différen-
ɜs quantités variables $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$.
:emple, l'équation du second ordre

$$y''+f(x, y, y')=0,$$

ɔns pour abréger y' et y'' au lieu de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$;
ıs par

$$F(x, y, y', a)=0,$$

premier ordre dont elle dérive, a étant la con-
n a fait disparaître. Pour opérer l'élimination
ı résoudre l'équation $F=0$ par rapport à cette
ıis égaler à zéro la différentielle de la fonction
ıuvée pour valeur de la racine. L'équation ainsi
s'écrire

$$\frac{da}{dx}+\frac{da}{dy}y'+\frac{da}{dy'}y''=0,$$

ınt sous la forme

$$y''+\frac{\frac{da}{dx}+\frac{da}{dy}y'}{\frac{da}{dy'}}=0,$$

ɜvenir identique avec l'équation différentielle

proposée $y'' + f(x, y, y') = 0$; d'où l'on conclut que l'on a identiquement

$$[y'' + f(x, y, y')] \frac{da}{dy'} = \frac{da}{dx} + \frac{da}{dy} y' + \frac{da}{dy'} y'' :$$

et comme le second membre est la fonction dérivée complète a' de la fonction de x, y, y' trouvée pour valeur de a en résolvant l'équation $F = 0$, il en doit être de même du premier. Ainsi l'équation proposée devient immédiatement intégrable lorsqu'on la multiplie par $\frac{da}{dy'}$.

Remarquons de plus que la règle pour les dérivées des fonctions implicites, appliquée à l'équation $F = 0$, donne

$$\frac{dF}{dy'} + \frac{dF}{da} \frac{da}{dy'} = 0, \text{ d'où } \frac{da}{dy'} = -\frac{\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}.$$

On a donc par ce qui précède

$$[y'' + f(x, y, y')] \frac{\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}} = -a',$$

ce qui montre qu'en multipliant l'équation proposée par le facteur $\frac{\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}$, le premier membre devient une différentielle exacte dont l'intégrale est $-a$, la valeur de a étant donnée par l'équation $F = 0$.

D'ailleurs l'équation proposée deviendra également une

:xacte si on la multiplie par $\dfrac{\varphi(a).\dfrac{dF}{dy'}}{\dfrac{dF}{da}}$, $\varphi(a)$ dési-

ıction quelconque de a; puisqu'elle sera alors
: la quantité $-\varphi(a).a'$. Représentant par $\Phi(a)$ la
$-\varphi(a).a'$ est la fonction dérivée, l'intégrale de
ɔposée sera donc $\Phi(a)=const.$, ce qui donne
comme on doit remplacer a par sa valeur tirée
$F=0$, on voit que l'équation $a=const.$, ne
de l'équation $F=0$ dans laquelle a est regar-
ne constante arbitraire.

ru ci-dessus, qu'une équation du second ordre
deux équations primitives ou deux intégrales
ırdre, contenant chacune une constante arbi-
te. Il résulte de ce qui précède que chacune de
donnerait des facteurs différents, également
ıdre le premier membre de cette équation du
une différentielle exacte. De plus, tous ces fac-
: être compris comme il suit dans une formule
ınt

$$y', a)=0, \qquad \text{et} \qquad F_1(x, y, y', b)=0,$$

ıtions primitives du premier ordre de l'équation
et b étant les deux constantes arbitraires. On
après ce qu'on a vu plus haut,

$$[y''+f(x, y, y')]\frac{\dfrac{dF}{dy'}}{\dfrac{dF}{da}}=-a',$$

$$[y''+f(x, y, y')]\frac{\dfrac{dF_1}{dy'}}{\dfrac{dF_1}{db}}=-b'.$$

Soit maintenant $\Phi(a,b)$ une fonction quelconque de a, b. Multipliant respectivement les deux équations précédentes par $\frac{d\Phi}{da}, \frac{d\Phi}{db}$, et ajoutant, il viendra

$$[y''+f(x,y,y')]\left(\frac{\frac{d\Phi}{da}\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}+\frac{\frac{d\Phi}{db}\frac{dF_1}{dy'}}{\frac{dF_1}{db}}\right)=-\left(\frac{d\Phi}{da}a'+\frac{d\Phi}{db}b'\right),$$

et comme le second membre est la fonction dérivée complète de $-\Phi(a,b)$, il s'ensuit que l'équation proposée étant multipliée par le facteur $\frac{\frac{d\Phi}{da}\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{da}}+\frac{\frac{d\Phi}{db}\frac{dF_1}{dy'}}{\frac{dF_1}{db}}$, devient une fonction dérivée complète, dont la fonction primitive est $-\Phi(a,b)=$ *const.*

Comme on peut prendre une autre fonction quelconque $\Psi(a,b)$, qui conduirait à l'intégrale $-\Psi(a,b)=$ *const.*, on en conclut $a=$ *const.* et $b=$ *const.* pour les deux intégrales de l'équation proposée, a et b étant déterminées respectivement, par les équations $F=0$ et $F_1=0$.

Les notions précédentes s'étendent facilement aux équations différentielles d'un ordre quelconque.

Intégration des équations linéaires à deux variables d'un ordre quelconque.

438. On nomme linéaires les équations dans lesquelles la fonction y et ses coefficients différentiels n'entrent qu'à la première puissance. Elles sont généralement de la forme

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + Uy = V, \ldots\ldots \quad (1)$$

représentant des fonctions quelconques de la
pendante x.
dérerons en premier lieu l'équation

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + Uy = 0, \ldots\ldots \quad (2)$$

les coefficients P, Q,.....U seraient des quan-
ntes, c'est-à-dire indépendantes de x et y. Il
grer cette équation, c'est-à-dire de trouver une
e y en fonction de x qui y satisfasse, et qui
constantes arbitraires de plus que n'en renferme
fférentielle proposée.
supposions $y = e^{px}$, nous aurions en général

; et en substituant cette valeur dans l'équation

viendrait

$$+ Pp^{n-1} + Qp^{n-2} + \ldots\ldots + U = 0. \ldots\ldots \quad (3)$$

quent, si l'on prend pour p une des racines de
3), la valeur $y = e^{px}$ satisfera à l'équation (2); ce
aleur particulière de la fonction y. Et comme
3) aura en général n racines différentes, que nous
par $p', p'', p''', \ldots\ldots p^{(n)}$, nous aurons de cette ma-
eurs particulières de la forme e^{px}, qui toutes satis-
quation (2).
ipliant chacune de ces valeurs par un coefficient
lles ne cesseront pas de satisfaire à l'équation (2).
te équation sera également satisfaite par la somme
u d'un plus grand nombre des valeurs dont il

s'agit. Il résulte de là qu'au moyen des n valeurs particulières correspondantes aux racines $p', p'', p''', \ldots\ldots p^{(n)}$, on peut former l'expression

$$y = A'e^{p'x} + A''e^{p''x} + A'''e^{p'''x} + \ldots\ldots\ldots + A^{(n)}e^{p^{(n)}x},$$

qui satisfait à l'équation différentielle proposée, et qui, contenant les n constantes arbitraires $A', A'', A''', \ldots\ldots A^{(n)}$, en est nécessairement l'intégrale générale.

439. Si l'équation (3) avait des racines imaginaires, la méthode précédente s'appliquerait également, les exponentielles imaginaires pouvant être remplacées par des sinus et cosinus d'arcs réels. Soient en effet $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ deux racines imaginaires de l'équation (3). Les valeurs particulières correspondantes seront

$$A'e^{x(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + A''e^{x(\alpha-\beta\sqrt{-1})},$$

ou

$$e^{\alpha x}(A'e^{\beta x\sqrt{-1}} + A''e^{-\beta x\sqrt{-1}}),$$

ou

$$e^{\alpha x}[(A'+A'')\cos.\beta x + (A'-A'')\sqrt{-1}.\sin.\beta x],$$

ou, en écrivant B' et B'' à la place de $A' + A''$ et $(A' - A'')\sqrt{-1}$,

$$e^{\alpha x}(B'\cos.\beta x + B''\sin.\beta x),$$

B' et B'' représentant de nouvelles constantes arbitraires.

440. Si l'équation (3) a deux ou plusieurs racines égales, la méthode dont il s'agit paraît en défaut. L'intégrale prend alors une forme particulière que l'on peut trouver de la manière suivante. Supposons d'abord que les premières racines p' et p'' diffèrent très-peu l'une de l'autre, en sorte que l'on

$= p' + \omega$, ω étant une quantité très-petite.
deux valeurs particulières correspondantes

$$^{x} + A''^{(p'+\omega)x} = e^{p'x}(A' + A''e^{\omega x}),$$

nt l'exponentielle $e^{\omega x}$,

$$\left(A' + A'' + A''\omega x + A''\frac{\omega^2 x^2}{2} + \text{etc.}\right).$$

suppose que ω devienne infiniment petite,
de prendre les valeurs de A' et A'' telles
e une valeur finie et arbitraire, ce qui
iment grande, et que $A' + A''$ conserve
aleur finie et arbitraire, ce qui suppose A'
grande, et de signe contraire à A''. Quant
nant les puissances supérieures de ω, ils
igés. La somme des deux valeurs particu-
it deviendra donc dans le cas de deux ra-

$$e^{p'x}(B' + B''x),$$

deux constantes arbitraires.
nnement s'appliquerait au cas où les trois
seraient égales entre elles. Supposant
is aurions donc pour la somme des trois
es correspondantes

$$^{p'x}(A' + A''x) + A'''e^{(p'+\omega)x},$$

$$\left(A''' + A'''\omega x + A'''\frac{\omega^2 x^2}{2} + A'''\frac{\omega^3 x^3}{2.3} + \text{etc.}\right).$$

enant que ω devienne infiniment petite.

Nous pourrons néanmoins prendre A', A'', A''' telles que les quantités $A' + A'''$, $A'' + A'''\omega$, $\frac{A'''\omega^2}{2}$ conservent des valeurs finies et arbitraires. Supprimant d'ailleurs le terme contenant ω^3 et les termes suivants, il restera pour la somme des trois valeurs particulières dont il s'agit.

$$e^{p'x}(B' + B''x + B'''x^2).$$

On procéderait de la même manière dans le cas où il y aurait un plus grand nombre de racines égales; et l'on voit qu'en général l'existence d'un nombre r de racines égales à p' dans l'équation (2) donne lieu à autant de valeurs particulières dont la somme est exprimée par

$$e^{p'x}(B' + B''x + B'''x^2 + \ldots\ldots + B^{(r)}x^{r-1}).$$

441. Revenons maintenant à l'équation (1) dans laquelle les quantités $P, Q, \ldots\ldots U, V$ sont en général des fonctions quelconques de x. On remarquera d'abord que si le terme V était nul, c'est-à-dire si l'on avait simplement

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + Uy = 0, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

cette équation aurait, comme l'équation (2), la propriété d'être satisfaite par la somme de plusieurs valeurs particulières multipliées chacune par une constante, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître. Il suffirait donc alors de connaître un nombre n de valeurs particulières pour avoir immédiatement l'intégrale générale demandée.

442. Lorsque le dernier terme V subsiste dans l'équation (1), elle ne présente plus la même propriété. Néanmoins l'intégrale générale peut être obtenue au moyen de la mé-

e lorsqu'on connaît n valeurs particulières qui
uation (4).
$''$, Y''',..... $Y^{(n)}$ les n valeurs particulières dont il
n formerons l'expression générale

$$= A'Y' + A''Y'' + A'''Y''' + \ldots\ldots + A^{(n)}Y^{(n)},$$

A', A'', A''',..... $A^{(n)}$ désignent maintenant des
éterminées de x. En prenant les différentielles
e cette expression, on aura d'abord

$$: A'\frac{dY'}{dx} + A''\frac{dY''}{dx} + A'''\frac{dY'''}{dx} + \ldots\ldots + A^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}$$
$$+ \frac{dA'}{dx}Y' + \frac{dA''}{dx}Y'' + \frac{dA'''}{dx}Y''' + \ldots\ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx}Y^{(n)},$$

erons la seconde ligne à zéro, en regardant les
, A'', A''',..... $A^{(n)}$ comme assujetties à satisfaire à
on. Il viendra alors

$$, \frac{d^2Y'}{dx^2} + A''\frac{d^2Y''}{dx^2} + A'''\frac{d^2Y'''}{dx^2} + \ldots\ldots + A^{(n)}\frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2}$$
$$\frac{A'}{x}\frac{dY'}{dx} + \frac{dA''}{dx}\frac{dY''}{dx} + \frac{dA'''}{dx}\frac{dY'''}{dx} + \ldots\ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}.$$

même la seconde ligne à zéro, il viendra

$$\frac{d^3Y'}{dx^3} + A''\frac{d^3Y''}{dx^3} + A'''\frac{d^3Y'''}{dx^3} + \ldots\ldots + A^{(n)}\frac{d^3Y^{(n)}}{dx^3}$$
$$\frac{A'}{x}\frac{d^2Y'}{dx^2} + \frac{dA''}{dx}\frac{d^2Y''}{dx^2} + \frac{dA'''}{dx}\frac{d^2Y'''}{dx^2} + \ldots\ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx}\frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2},$$

égalerons la seconde ligne à zéro; et ainsi de suite.
viendrons de cette manière à

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A' \frac{d^n Y'}{dx^n} + A'' \frac{d^n Y''}{dx^n} + A''' \frac{d^n Y'''}{dx^n} + \ldots\ldots + A^{(n)} \frac{d^n Y^{(n)}}{dx^n}$$
$$+ \frac{dA'}{dx} \frac{d^{n-1} Y'}{dx^{n-1}} + \frac{dA''}{dx} \frac{d^{n-1} Y''}{dx^{n-1}} + \frac{dA'''}{dx} \frac{d^{n-1} Y'''}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx} \frac{d^{n-1} Y^{(n)}}{dx^{n-1}},$$

et nous égalerons la seconde ligne à V.

Cela étant posé, il est visible que les valeurs $y = Y'$, $y = Y''$, $y = Y'''$,..... $y = Y^{(n)}$ satisfaisant séparément à l'équation (4), l'expression générale suivante $y = A'Y' + A''Y'' + A'''Y''' + \ldots\ldots + A^{(n)}Y^{(n)}$ satisfera également à l'équation (1), pourvu que l'on regarde les fonctions A', A'', A''',..... $A^{(n)}$ comme assujetties à vérifier les n équations

$$\frac{dA'}{dx} Y' + \frac{dA''}{dx} Y'' + \frac{dA'''}{dx} Y''' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx} Y^{(n)} = 0,$$
$$\frac{dA'}{dx} \frac{dY'}{dx} + \frac{dA''}{dx} \frac{dY''}{dx} + \frac{dA'''}{dx} \frac{dY'''}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx} \frac{dY^{(n)}}{dx} = 0,$$
$$\frac{dA'}{dx} \frac{d^2Y'}{dx^2} + \frac{dA''}{dx} \frac{d^2Y''}{dx^2} + \frac{dA'''}{dx} \frac{d^2Y'''}{dx^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx} \frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dA'}{dx} \frac{d^{n-1}Y'}{dx^{n-1}} + \frac{dA''}{dx} \frac{d^{n-1}Y''}{dx^{n-1}} + \frac{dA'''}{dx} \frac{d^{n-1}Y'''}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{dA^{(n)}}{dx} \frac{d^{n-1}Y^{(n)}}{dx^{n-1}} = V.$$

Or, ces équations étant linéaires donneront toujours pour les fonctions $\frac{dA'}{dx}$, $\frac{dA''}{dx}$, $\frac{dA'''}{dx}$,..... $\frac{dA^{(n)}}{dx}$, des valeurs déterminées que nous représenterons par Φ', Φ'', Φ''',..... $\Phi^{(n)}$. L'expression de l'intégrale générale cherchée sera donc

$$y = Y'(a' + \int dx.\Phi') + Y''(a'' + \int dx.\Phi'') + \ldots + Y^{(n)}(a^{(n)} + \int dx.\Phi^{(n)}),$$

et contiendra les n constantes arbitraires a', a'',..... $a^{(n)}$.

443. Si l'on ne connaissait qu'un nombre de valeurs par-

dre que le nombre n qui exprime l'ordre de rentielle proposée, la méthode précédente ne re appliquée de la même manière. Les fonc-
, $\frac{dA'''}{dx}$, etc., n'étant plus en assez grand nombre pût poser toutes les équations nécessaires pour e les secondes lignes des expressions des diffé-
$\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., on serait obligé de laisser sub-
s expressions les différentielles supérieures de s des fonctions indéterminées A', A'', A''', etc. des valeurs de ces fonctions exigerait donc d'une ou de plusieurs équations différentielles. des valeurs particulières connues est $n-1$, générale peut toujours être obtenue, parce que tion des fonctions A', A'', A'''; etc., n'exige alors tion d'une équation différentielle linéaire du e, intégration qui peut toujours être effectuée nt au n° 387.

s le cas particulier où les coefficients P, Q,.....U n (1) sont des nombres constants, le dernier ul étant une fonction de x, les valeurs parti-
Y'', Y''',..... $Y^{(n)}$ sont connues, conformément à vu n° 438, puisqu'elles sont exprimées par ^{px},..... $e^{p^{(n)}x}$, en désignant par p', p'', p''',..... $p^{(n)}$ de l'équation (3). La méthode précédente c facilement l'expression de l'intégrale cher-

t, par exemple, l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = V.$$

Désignant par p' et p'' les racines de l'équation

$$p^2 + Pp + Q = 0;$$

l'expression générale de y sera

$$y = A'e^{p'x} + A''e^{p''x},$$

et les fonctions A' et A'' seront assujetties à satisfaire aux équations

$$\frac{dA'}{dx}e^{p'x} + \frac{dA''}{dx}e^{p''x} = 0,$$
$$\frac{dA'}{dx}p'e^{p'x} + \frac{dA''}{dx}p''e^{p''x} = V.$$

On en déduit par l'élimination

$$\frac{dA'}{dx} = \frac{V.e^{-p'x}}{p'-p''}, \quad \text{d'où} \quad A' = \frac{a' + \int dx.Ve^{-p'x}}{p'-p''},$$
$$\frac{dA''}{dx} = \frac{V.e^{-p''x}}{p''-p'}, \quad \text{d'où} \quad A'' = \frac{a'' + \int dx.Ve^{-p''x}}{p''-p'},$$

a' et a'' étant les deux constantes arbitraires. L'intégrale demandée est donc

$$y = \frac{(a' + \int dx.Ve^{-p'x})e^{p'x} - (a'' + \int dx.Ve^{-p''x})e^{p''x}}{p'-p''}.$$

446. Si les racines de l'équation $p^2 + Pp + Q = 0$ étaient imaginaires et désignées par $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, on prendrait d'après le n° 439, pour l'expression générale de y,

$$y = A'e^{\alpha x}\cos.\beta x + A''e^{\alpha x}\sin.\beta x.$$

Les fonctions A', A'' seraient assujetties à satisfaire aux équations

$$x + \frac{dA''}{dx} e^{ax} \sin.6x = 0,$$

$$.6x - 6e^{ax} \sin.6x) + \frac{dA''}{dx} (ae^{ax} \sin.6x + 6e^{ax} \cos.6x) = V,$$

éduit par l'élimination

$$-\frac{Ve^{-ax}\sin.6x}{6}, \quad \text{et} \quad A' = \frac{a' - \int dx.Ve^{-ax}\sin.6x}{6},$$

$$\frac{Ve^{-ax}\cos.6x}{6}, \quad \text{et} \quad A'' = \frac{a'' + \int dx.Ve^{-ax}\cos.6x}{6}.$$

on de l'intégrale générale est donc ici

$$\frac{\int dx.Ve^{-ax}\sin.6x)\cos.6x + (a'' + \int dx.Ve^{-ax}\cos.6x)\sin.6x}{6}.$$

les racines de l'équation $p^2 + Pp + Q = 0$ étaient
re elles, l'expression de y du n° 443, se réduiton en trouverait la véritable valeur en différentiant
ateur et le dénominateur par rapport à p'', puis
$= p'$, ce qui donne

$$y = -(\int dx.xVe^{-p'x})e^{p'x} + (a'' + \int dx.Ve^{-p'x})xe^{p'x}.$$

les limites inférieures des intégrales demeurent
s, on peut rétablir dans le premier terme la con-
et écrire

$$= (a' - \int dx.xVe^{-p'x})e^{p'x} + (a'' + \int dx.Ve^{-p'x})xe^{p'x}.$$

ormule, dans le cas où $V = 0$, se réduit à

$$y = (a' + a''x)e^{p'x},$$

ela doit être d'après le n° 440.

448. L'intégration des équations linéaires du second ordre, donne immédiatement la loi des températures permanentes d'une barre ou d'un anneau dont la section transversale est uniforme et fort petite.

Concevons une barre cylindrique ou prismatique d'une longueur infinie dont une extrémité placée dans un foyer de chaleur est maintenue constamment à la température U. Cette barre est placée dans l'air à la température 0. La chaleur communiquée par le foyer se propage dans la barre, l'échauffe progressivement, et se dissipe en partie dans le milieu environnant. Après un temps suffisant, il s'établira dans toute l'étendue du prisme des températures constantes dont il s'agit de connaître la loi, et qui sont évidemment déterminées par cette condition, que chaque partie reçoive du foyer par une de ses extrémités, une quantité de chaleur égale à celle qu'elle transmet aux parties suivantes et qu'elles perdent par leur surface extérieure.

Les dimensions transversales de la barre étant supposées très-petites, on peut regarder comme égales les températures de tous les points d'une même section. Nous désignerons par

Ω l'aire de la section transversale de la barre;

γ le périmètre de cette section;

x la distance au foyer d'une section quelconque de la barre;

v la température qui a lieu dans cette section;

K, h les conducibilités intérieure et extérieure de la substance de la barre.

Considérons l'élément de la longueur de la barre compris entre les sections placées aux distances x et $x + dx$. La sur-

et élément étant γdx, la quantité de la chaleur perdue
rface extérieure dans l'unité detemps, est $h\gamma dx.v$; et,
équent, la portion de chaleur perdue dans le même
ar la partie de la barre qui est à la suite, est exprimée
égrale $h\gamma \int_x^{\infty} v dx$. Mais d'une autre part, la tempé-
e tous les points d'une même section étant supposée
e, la chaleur traverse l'élément dont il s'agit, de la
manière que cela aurait lieu pour un solide infini
entre deux plans parallèles. L'épaisseur du solide
dx, et les températures extrêmes sont v et $v + dv$.
ntité de chaleur qui le traverse dans l'unité de temps
c $= K\Omega \frac{dv}{dx}$. Ainsi nous avons pour exprimer la con-
énoncée, l'équation

$$-K\Omega \frac{dv}{dx} = h\gamma \int_x^{\infty} v dx,$$

ne en différentiant

$$K\Omega \frac{d^2v}{dx^2} = h\gamma . v.$$

parvient également à cette équation en remarquant
$-K\Omega \frac{dv}{dx}$ représentant la quantité de chaleur qui traverse
'unité de temps la section de la barre placée à la dis-
x du foyer, on aura $-K\Omega \left(\frac{dv}{dx} + d.\frac{dv}{dx}\right)$ pour repré-
la quantité de chaleur qui traverse dans le même temps
tion placée à la distance $x + dx$. Or, la différence de
eux quantités, qui est $K\Omega \frac{d^2v}{dx^2} dx$, doit nécessairement

être égale à la quantité de chaleur $h\gamma dx.v$ qui se dissipe par la partie de la surface correspondante à l'intervalle dx. On a donc comme ci-dessus

$$K\Omega \frac{d^2v}{dx^2} dx = h\gamma dx.v, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{h\gamma}{K\Omega} v.$$

449. L'intégrale complète de cette équation différentielle est, conformément au n° 445,

$$v = A.e^{-x\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}}} + B.e^{x\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}}},$$

e représentant la base des logarithmes hyperboliques, A et B les deux constantes arbitraires. Mais il est visible qu'ici la constante B doit être nulle, car la valeur de v ne peut croître indéfiniment avec x. De plus, comme on doit avoir $v = U$ quand $x = 0$, la constante A doit être égale à U. L'expression demandée des températures permanentes est donc

$$v = U.e^{-x\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}}}.$$

Ainsi, les températures des divers points du prisme étant représentées par des nombres, les distances de ces points au foyer sont représentées par les logarithmes correspondants. Dans deux barres de même substance, les distances du foyer où l'on observe la même température sont proportionnelles à la quantité $\sqrt{\frac{\Omega}{\gamma}}$, ou à la racine quarrée des dimensions homologues si les sections sont semblables. Dans deux barres de substances différentes, ces mêmes distances sont proportionnelles au rapport $\sqrt{\frac{K\Omega}{h\gamma}}$. Les observations de ce genre

faire connaître pour divers corps la valeur du rap-
les deux conducibilités. On a même cherché à faire
s observations dont il s'agit, à déterminer les valeurs
de la conducibilité intérieure K, en recouvrant chaque
l'une couche de vernis, dans la vue de leur donner la
onducibilité extérieure, procédé qui ne présente peut-
toute l'exactitude nécessaire.

On déduit d'ailleurs facilement de l'équation précé-
outes les circonstances du mouvement de la chaleur
; différentes parties du prisme. La quantité de chaleur
verse dans l'unité de temps la section placée à la dis-
du foyer, est

$$-K\Omega.\frac{dv}{dx} = U.\sqrt{hK.\gamma\Omega}.e^{-x\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}}},$$

conséquent, la quantité de chaleur qui sort du foyer,
se dissipe dans l'air par la surface entière de la barre,
ns le même temps,

$$U.\sqrt{hK.\gamma\Omega}.$$

quantité est donc proportionnelle à la puissance $\frac{3}{2}$ des
sions homologues pour des barres de même substance
igures semblables.

. Admettons maintenant qu'il s'agisse d'une barre pris-
ne d'une longueur déterminée représentée par a, et dont
ux extrémités soient maintenues respectivement aux
ratures constantes U et V. La loi des températures

permanentes sera toujours donnée par l'équation différentielle du n° 448; mais dans l'intégrale générale du n° 449, que nous pouvons écrire

$$v = A.e^{-\lambda x} + B.e^{\lambda x},$$

en posant pour abréger $\sqrt{\frac{h\gamma}{K\Omega}} = \lambda$, on devra déterminer les constantes arbitraires A et B de manière que $v = U$ lorsque $x = 0$, et $v = V$ lorsque $x = a$. Cette intégrale deviendra alors

$$v = \frac{U(e^{-\lambda(a-x)} - e^{\lambda(a-x)}) + V(e^{-\lambda x} - e^{\lambda x})}{e^{-\lambda a} - e^{\lambda a}},$$

expression qui donnera les températures d'un point quelconque de la barre compris entre ces deux extrémités.

452. Les résultats précédents ne supposent pas nécessairement que l'axe de la barre soit rectiligne. Les dimensions de la section transversale étant supposées très-petites, on peut attribuer à cette barre une figure quelconque, et même supposer que ses deux extrémités sont réunies, de manière à former un anneau. La formule du numéro précédent exprimera toujours les températures permanentes d'une portion de la barre comprise entre deux foyers, dont l'intervalle est a, et qui sont maintenus respectivement aux températures U et V.

Si la barre forme un anneau, et s'il n'y a qu'un seul foyer maintenu à la température U, on aura évidemment dans toute l'étendue de l'anneau

$$v = U\frac{e^{-\lambda(a-x)} - e^{\lambda(a-x)} + e^{-\lambda x} - e^{\lambda x}}{e^{-\lambda a} - e^{\lambda a}},$$

$$v = U\,\frac{e^{\lambda(a-x)} + e^{\lambda a}}{e^{\lambda a} + 1},$$

ignant la longueur de son périmètre. Si l'on veut ter les x du point de l'anneau opposé au foyer, et qui ge le périmètre en deux parties égales, on aura

$$v = U\,\frac{e^{-\lambda x} + e^{\lambda x}}{e^{-\frac{1}{2}\lambda a} + e^{\frac{1}{2}\lambda a}}.$$

ne donnera à x dans la première de ces formules que des eurs comprises entre 0 et a, et dans la seconde que des leurs comprises entre $-\frac{a}{2}$ et $+\frac{a}{2}$.

453. Considérons trois points de l'intervalle compris entre leux foyers situés aux distances x, $x+\alpha$ et $x+2\alpha$ de l'origine des x. En désignant respectivement par v_0, v_1, v_2 leurs températures, on aura, d'après l'équation générale du n° 451

$$v_0 = A.e^{-\lambda x} + B.e^{\lambda x},$$
$$v_1 = A.e^{-\lambda(x+\alpha)} + B.e^{\lambda(x+\alpha)},$$
$$v_2 = A.e^{-\lambda(x+2\alpha)} + B.e^{\lambda(x+2\alpha)}.$$

Donc

$$\frac{v_0 + v_2}{v_1} = \frac{Ae^{-\lambda x}(1 + e^{-2\lambda\alpha}) + Be^{\lambda x}(1 + e^{2\lambda\alpha})}{Ae^{-\lambda(x+\alpha)} + Be^{\lambda(x+\alpha)}},$$

ou bien

$$\frac{v_0 + v_2}{v_1} = e^{-\lambda\alpha} + e^{\lambda\alpha}.$$

On voit donc que l'état permanent des températures d'une barre ou d'un anneau est toujours tel, que prenant entre deux foyers plusieurs points également espacés, et considérant trois de ces points placés les uns à la suite des autres, la somme des températures des points extrêmes, divisée par la température du point intermédiaire, présentera toujours une même valeur qui dépend uniquement de la distance α des points dont il s'agit. Ce résultat remarquable a été vérifié par l'expérience.

XXXIV. ÉLIMINATION DES VARIABLES ENTRE LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES. — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES SIMULTANÉES.

454. Considérons plusieurs variables x, y, z, etc., regardées comme des fonctions d'une autre variable indépendante v, et admettons que l'on ait plusieurs équations entre les variables x, y, z, etc., et leurs coefficients différentiels

$$\frac{dx}{dv}, \frac{d^2x}{dv^2}, \text{etc...}; \frac{dy}{dv}, \frac{d^2y}{dv^2}, \text{etc...}; \frac{dz}{dv}, \frac{d^2z}{dv^2}, \text{etc...}$$

Si les équations dont il s'agit sont en même nombre que les variables x, y, z, etc., on pourra toujours déduire du système de ces équations, des équations différentielles séparées contenant une seule de ces variables avec la variable indépendante v. L'intégration des équations proposées, c'est-à-dire la recherche des expressions générales de x, y, z, etc., en fonction de la variable indépendante, serait ainsi ramenée au cas d'une seule équation différentielle entre deux variables.

En effet, supposons que l'on n'ait que deux équations entre les deux variables x et y, et leurs coefficients différentiels pris

par rapport à v. Soit m l'ordre de la première équation par rapport à y, et n l'ordre de la seconde équation, par rapport à la même variable. On différentiera n fois la première équation, et m fois la seconde, ce qui donnera, en comprenant les équations proposées, $m+n+2$ équations, au moyen desquelles on peut éliminer la variable y et ses coefficients différentiels $\frac{dy}{dv}$, $\frac{d^2y}{dv^2}$, $\frac{d^3y}{dv^3}$, etc., jusqu'à l'ordre $m+n$. Il restera une équation qui ne contiendra que la variable x seule et ses coefficients différentiels. On obtiendra de la même manière une équation en y. La même remarque s'applique au cas où le nombre des variables et des équations proposées est plus considérable. On voit de plus que, si les équations différentielles proposées sont linéaires, l'élimination dont il s'agit conduira à une équation finale également linéaire.

455. On peut, dans quelques cas, et particulièrement lorsque les équations différentielles simultanées sont linéaires et à coefficients constants, obtenir directement des équations primitives dont on déduirait les valeurs générales des variables. Considérons d'abord deux équations du premier ordre, qui seront généralement de la forme

$$P\frac{dx}{dv} + Q\frac{dy}{dv} + Sx + Ty = U$$
$$P'\frac{dx}{dv} + Q'\frac{dy}{dv} + S'x + T'y = U'.$$

Par une élimination facile, on peut les ramener à la forme plus simple

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dv} + Sx + Ty = U \\ \frac{dy}{dv} + S'x + T'y = U' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

Nous regarderons en général S, T, U, S', T', U' comme représentant des fonctions quelconques de v. La difficulté consiste ici en ce que les deux variables x, y, se trouvent à la fois dans les deux équations proposées, et il s'agit de remplacer ces deux équations par deux autres qui ne contiendraient chacune qu'une seule variable avec la variable indépendante v. Pour y parvenir, on multipliera la seconde équation par un facteur Φ qui sera une fonction indéterminée de v, et on l'ajoutera à la première, ce qui donnera

$$\frac{dx}{dv} + \Phi\frac{dy}{dv} + (S + S'\Phi)x + (T + T'\Phi)y = U + U'\Phi.$$

De plus on posera $x + \Phi y = u$, d'où

$$x = u - \Phi y,$$
$$\frac{dx}{dv} + \Phi\frac{dy}{dv} = \frac{du}{dv} - \frac{d\Phi}{dv}y,$$

u étant une nouvelle variable. Ces valeurs étant substituées dans l'équation précédente la changeront en

$$\frac{du}{dv} + (S+S'\Phi)u - y\left\{\left[\frac{d\Phi}{dv} + (S+S'\Phi)\Phi\right] - (T+T'\Phi)\right\} = U + U'\Phi;$$

et en déterminant la fonction Φ de manière à satisfaire à l'équation

$$\frac{d\Phi}{dv} + (S+S'\Phi)\Phi - (T+T'\Phi) = 0, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

il restera à intégrer l'équation

$$\frac{du}{dv} + (S + S'\Phi)u = U + U'\Phi. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

L'équation (2) ne contient que les variables Φ et v. Si l'on peut trouver une valeur pour Φ qui satisfasse à cette équation, on la substituera dans l'équation (3), qui ne contiendra plus que les variables u et v, et qui rentrera dans les cas traités n° 438 et suivants.

456. Si les coefficients S, T, S', T' des équations (1), sont constants, on pourrait satisfaire à l'équation (2), en prenant pour Φ un nombre constant, ce qui donne $\frac{d\Phi}{dv}=0$, la valeur de ce nombre étant déterminée par l'équation du second degré

$$(S+S'\Phi)\Phi-(T+T'\Phi)=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

En appliquant d'ailleurs à l'équation (3), la méthode du n° 386, on trouvera pour l'intégrale de cette équation

$$u=e^{-(S+S'\Phi)v}[a+\int dv(U+U'\Phi).e^{(S+S'\Phi)v}]. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

a étant la constante arbitraire. On doit mettre dans cette expression à la place de Φ, les deux valeurs qui satisfont à l'équation (4); en les désignant par Φ_1 et Φ_2, et remplaçant u par son expression en x et y, on aura les deux équations primitives

$$x+\Phi_1 y=e^{-(S+S'\Phi_1)v}[a_1+\int dv(U+U'\Phi_1).e^{(S+S'\Phi_1)v}],$$
$$x+\Phi_2 y=e^{-(S+S'\Phi_2)v}[a_2+\int dv(U+U'\Phi_2).e^{(S+S'\Phi_2)v}],$$

au moyen desquelles on pourra déterminer les expressions de chacune des variables x et y en fonction de v.

457. Si les racines de l'équation (4) étaient imaginaires, et désignées par $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, l'équation (2), à laquelle la

quantité Φ doit satisfaire, pourrait alors se mettre sous la forme

$$\frac{d\Phi}{dv} + S'[(\Phi - \alpha)^2 + \beta^2] = 0,$$

ou bien

$$\frac{d\Phi}{(\Phi - \alpha)^2 + \beta^2} + S'dv = 0;$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{\beta} \text{arc. tang.} \frac{\Phi - \alpha}{\beta} = C - S'v,$$

C désignant une constante arbitraire, et donne

$$\Phi = \alpha + \beta . \text{tang.} \beta(C - S'v).$$

En donnant à la constante C deux valeurs particulières quelconques; en supposant par exemple $\beta C = 0$ et $\beta C = \frac{\pi}{2}$, on aura les deux valeurs

$$\Phi = \alpha - \beta . \text{tang.} \beta S'v \qquad \text{et} \qquad \Phi = \alpha + \beta . \text{cot.} \beta S'v,$$

qui étant substituées successivement dans l'équation (5), donneront les deux équations nécessaires pour déterminer x et y en fonction de v.

Si les deux racines de l'équation (4) étaient égales entre elles, et représentées par ρ, l'équation (2) se mettrait sous la forme

$$\frac{d\Phi}{dv} + S'(\Phi - \rho)^2 = 0,$$

ou

$$\frac{d\Phi}{(\Phi - \rho)^2} + S'dv = 0;$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{\Phi-\rho}=C+S'v,$$

C désignant toujours une constante arbitraire ; d'où l'on tire

$$\Phi=\rho+\frac{1}{C+S'v}.$$

En donnant à C deux valeurs particulières quelconques, supposant par exemple $C=\infty$ et $C=0$, on aura

$$\Phi=\rho \quad \text{et} \quad \Phi=\rho+\frac{1}{S'v},$$

leurs qui devront être substituées comme ci-dessus dans quation (3).

38. Supposons maintenant que l'on ait trois équations du nier ordre entre les variables x, y, z et la variable indélante v, qui, d'après ce qui a été dit n° 455, pourront urs se ramener à la forme

$$\frac{dx}{dv}+Sx+Ty+Uz=V,$$
$$\frac{dy}{dv}+S'x+T'y+U'z=V',$$
$$\frac{dz}{dv}+S''x+T''y+U''z=V''.$$

pliera respectivement la seconde et la troisième par les facteurs indéterminés Φ et Ψ, et on les la première, ce qui donnera

$$\frac{dy}{dv}+\Psi\frac{dz}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)x+(T+T'\Phi+T''\Psi)y$$
$$+(U+U'\Phi+U''\Psi)z=V+V'\Phi+V''\Psi.$$

On posera ensuite

$$x+\Phi y+\Psi z=u, \text{ d'où } x=u-\Phi y-\Psi z,$$

$$\frac{dx}{dv}+\Phi\frac{dy}{dv}+\Psi\frac{dz}{dv}=\frac{du}{dv}-\frac{d\Phi}{dv}y-\frac{d\Phi}{dv}z,$$

u désignant une nouvelle variable. Ces valeurs étant substituées dans l'équation précédente, il viendra

$$\frac{du}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)u-y\left[\frac{d\Phi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Phi-(T+T'\Phi+T''\Psi)\right]$$
$$-z\left[\frac{d\Psi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Psi-(U+U'\Phi+U''\Psi)\right]=V+V'\Phi+V''\Psi.$$

Ainsi, déterminant Φ et Ψ de manière à satisfaire aux deux équations

$$\frac{d\Phi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Phi-(T+T'\Phi+T''\Psi)=0,$$
$$\frac{d\Psi}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)\Psi-(U+U'\Phi+U''\Psi)=0;$$

il restera à intégrer

$$\frac{du}{dv}+(S+S'\Phi+S''\Psi)u=V+V'\Phi+V''\Psi;$$

entre les seules variables u et v. Les équations seront donc résolues si l'on peut trouver des valeurs de Φ et Ψ qui satisfassent aux deux équations dont dépendent ces fonctions.

459. Si l'on admet, comme dans le n° 456, que les coefficients S, T, U, S', T', U', S'', T'', U'' des premiers membres des équations proposées soient des nombres constants, on pourra prendre pour Φ et Ψ des valeurs constantes, déter-

minées par les équations

$$(S+S'\Phi+S''\Psi)\Phi-(T+T'\Phi+T''\Psi)=0\,,$$
$$(S+S'\Phi+S''\Psi)\Psi-(U+U'\Phi+U''\Psi)=0\,,$$

et comme les équations finales donnant les valeurs de Φ et Ψ monteront au troisième degré, on aura trois systèmes de valeurs que nous désignerons respectivement par Φ_1 et Ψ_1, Φ_2 et Ψ_2, Φ_3 et Ψ_3.

L'intégrale de l'équation entre u et v étant d'ailleurs

$$u=e^{-(S+S'\Phi+S''\Psi)v}\left[a+\int dv(U+U'\Phi+U''\Psi)\,.\,e^{(S+S'\Phi+S''\Psi)v}\right],$$

ous aurons les trois équations primitives

$$\Psi_1 z=e^{-(S+S'\Phi_1+S''\Psi_1)v}\left[a_1+\int dv(U+U'\Phi_1+U''\Psi_1)\,.\,e^{(S+S'\Phi_1+S''\Psi_1)v}\right],$$
$$\Psi_2 z=e^{-(S+S'\Phi_2+S''\Psi_2)v}\left[a_2+\int dv(U+U'\Phi_2+U''\Psi_2)\,.\,e^{(S+S'\Phi_2+S''\Psi_2)v}\right],$$
$$\Psi_3 y=e^{-(S+S'\Phi_3+S''\Psi_3)v}\left[a_3+\int dv(U+U'\Phi_3+U''\Psi_3)\,.\,e^{(S+S'\Phi_3+S''\Psi_3)v}\right],$$

étermineront les valeurs de x, y, z en fonction de v.

même méthode s'applique aux cas où l'on a un plus nombre de variables et d'équations différentielles, et it que ces équations s'intègrent toujours lorsque les nts des premiers membres sont constants.

Nous avons supposé jusqu'ici que les équations diffé- proposées étaient du premier ordre. Le cas où ces sont du second ordre et des ordres supérieurs est ı précédent de la manière suivante. Soient, par es deux équations du second ordre

$$\frac{d^2x}{dv^2} + A\frac{dx}{dv} + B\frac{dy}{dv} + Cx + Dy = E,$$
$$\frac{d^2y}{dv^2} + A'\frac{dx}{dv} + B'\frac{dy}{dv} + C'x + D'y = E'.$$

On posera $\frac{dx}{dv} = p$, $\frac{dy}{dv} = q$, p et q désignant de nouvelles variables. On aura alors les équations du premier ordre

$$\frac{dp}{dv} + Ap + Bq + Cx + Dy = E,$$
$$\frac{dq}{dv} + A'p + B'q + C'x + D'y = E',$$
$$\frac{dx}{dv} - p = 0,$$
$$\frac{dy}{dv} - q = 0,$$

entre les quatre variables x, y, p, q, et la variable indépendante v. Ces équations étant traitées par la méthode des n°s 435 et suivants, conduiront aux expressions demandées de x et y.

XXXV. INTÉGRATION PAR SÉRIES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

461. Lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir en termes finis, par le moyen des méthodes connues, l'expression de la fonction qui est donnée par une équation différentielle, on peut chercher à obtenir cette expression sous la forme d'un développement en série infinie. Si la série est convergente, l'expression dont il s'agit sera aussi propre que toute autre à faire connaître les valeurs numériques de la fonction cherchée.

éveloppement en série de la fonction y donnée par
on différentielle

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

tenir en général au moyen de ce qui a été dit dans le
ette équation étant résolue par rapport à $\frac{d^ny}{dx^n}$ donnera
s de ce coefficient différentiel et des coefficients dif-
des ordres supérieurs correspondantes à $x = 0$;
tituant ces valeurs dans l'expression générale

$$= y_0 + \frac{dy_0}{dx}x + \frac{d^2y_0}{dx^2}\frac{x^2}{2} + \frac{d^3y_0}{dx^3}\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.},$$

développement de la fonction y, dans lequel il
coefficients arbitraires $y_0, \frac{dy_0}{dx}, \frac{d^2y_0}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y_0}{dx^{n-1}}$.
cas particuliers où la supposition de $x = 0$ ren-
les valeurs de $\frac{d^ny}{dx^n}$ et des coefficients différentiels
upérieurs, on remarquerait que la formule de
ée n° 80, devient, en y faisant $x = a$, puis

$$+ \frac{d^2y_a}{dx^2}\frac{(x-a)^2}{2} + \frac{d^3y_a}{dx^3}\frac{(x-a)^3}{2.3} + \frac{d^4y_a}{dx^4}\frac{(x-a)^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

nte par $y_a, \frac{dy_a}{dx}, \frac{d^2y_a}{dx^2}$, etc., les valeurs parti-
nnent $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc., lorsqu'on donne à x

la valeur a. On déduirait donc de l'équation différentielle proposée les valeurs de $\frac{d^n y_a}{dx^n}$, $\frac{d^{n+1} y_a}{dx^{n+1}}$, $\frac{d^{n+2} y_a}{dx^{n+2}}$, etc., que l'on substituerait dans l'expression précédente. On pourrait d'ailleurs attribuer à a toute valeur qui ne rendrait pas infinies les valeurs des coefficients différentiels de l'ordre n, et des ordres plus élevés.

462. Il est souvent plus simple et plus facile de substituer à l'opération qui vient d'être indiquée, la méthode des coefficients indéterminés. Soit, par exemple, l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + xy = 0.$$

On posera, pour satisfaire à cette équation,

$$y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + A_3 x^{\alpha+3} + A^4 x^{\alpha+4} + \text{etc.},$$

A_0, A_1, A_2, etc., désignant des coefficients constants indéterminés, et α un exposant également indéterminé. Si l'on substitue cette expression de y dans l'équation proposée, il viendra

$$\begin{aligned} 0 = {} & A_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + A_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1} + A_2(\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha \\ & + A_3(\alpha+3)(\alpha+2)\Big|x^{\alpha+1} + A_4(\alpha+4)(\alpha+3)\Big|x^{\alpha+2} + \text{etc.}, \\ & \qquad + A_0 \qquad\qquad\qquad\qquad + A_1 \end{aligned}$$

équation où l'on fera disparaître les deux premiers termes du second membre, en supposant $\alpha = 0$, et laissant indéterminées les constantes A_0 et A_1. Le troisième disparaîtra en supposant $A_2 = 0$. Quant aux termes suivants, ils deviendront nuls en déterminant convenablement les coefficients A_3, A_4,

, etc., au moyen des trois premiers. Les valeurs de ces efficients seront données par les équations

$$-A_3 = \frac{A_0}{2.3} \quad \text{d'où l'on déduit} \quad A_3 = -\frac{A_0}{2.3}$$

$$-A_4 = \frac{A_1}{3.4} \qquad A_4 = -\frac{A_1}{3.4}$$

$$-A_5 = \frac{A_2}{4.5} \qquad A_5 = 0$$

$$-A_6 = \frac{A_3}{5.6} \qquad A_6 = \frac{A_0}{2.3.5.6}$$

$$-A_7 = \frac{A_4}{6.7} \qquad A_7 = \frac{A_1}{3.4.6.7}$$

$$-A_8 = \frac{A_5}{7.8} \qquad A_8 = 0$$

$$-A_9 = \frac{A_6}{8.9} \qquad A_9 = -\frac{A_0}{2.3.5.6.8.9}$$

$$-A_{10} = \frac{A_7}{9.10} \qquad A_{10} = -\frac{A_1}{3.4.6.7.9.10}$$

etc. etc.

La série qui donne l'expression cherchée de y est donc

$$y = A_0\left(1 - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} - \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9} + \text{etc.}\right)$$
$$+ A_1\left(x - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} - \frac{x^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \text{etc.}\right).$$

A_0 et A_1 sont les deux constantes arbitraires.

463. Si l'équation proposée était

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{x} = 0,$$

la substitution de l'expression

$$y = A_0 x^{\alpha} + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + A_3 x^{\alpha+3} + A x_4^{\alpha+4} + \text{etc.}$$

donnerait l'équation de condition

$$0 = A_0 \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} + A_1(\alpha+1)\alpha \left| \begin{array}{l} \\ +A_0 \end{array} \right. x^{\alpha-1} + A_2(\alpha+2)(\alpha+1) \left| \begin{array}{l} \\ +A_1 \end{array} \right. x^{\alpha}$$
$$+ A_3(\alpha+3)(\alpha+2) \left| \begin{array}{l} \\ +A_2 \end{array} \right. x^{\alpha+1} + \text{etc.}$$

On fait disparaître le premier terme en posant $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, mais la première hypothèse ne peut être admise parce que le second terme ne pourrait alors disparaître qu'en supposant aussi $A_0 = 0$. En faisant donc $\alpha = 1$, les coefficients différentiels seront déterminés par les équations

$$-A_1 . 2.1 = A_0, \text{ d'où l'on déduit } A_1 = -\frac{A_0}{1.2}$$
$$-A_2 . 3.2 = A_1 \qquad A_2 = \frac{1.2^2.3}{A_0}$$
$$-A_3 . 4.3 = A_2 \qquad A_3 = -\frac{A_0}{1.2^2.3^2.4}$$
$$-A_4 . 5.4 = A_3 \qquad A_4 = \frac{A_0}{1.2^2.3^2.4^2.5} \text{etc.}$$
$$-A_5 . 5.6 = A_4$$
$$\text{etc.}$$

Par conséquent l'équation est satisfaite par la valeur

$$y = A_0 \left(x - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2^2.3} - \frac{x^4}{1.2^2.3^2.4} + \frac{x^5}{1.2^2.3^2.4^2.5} - \text{etc.} \right).$$

Cette expression ne contenant qu'une seule constante arbi-

aire, présente bien une infinité de valeurs particulières de fonction y, mais elle n'est pas l'intégrale générale de équation proposée. Il est aisé de reconnaître d'ailleurs que on ne peut satisfaire à cette équation par une série ordonnée uivant les puissances descendantes de x.

464. Nous considérerons encore l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0.$$

En posant comme ci-dessus,

$$y=A_0x^\alpha+A_1x^{\alpha+1}+A_2x^{\alpha+2}+A_3x^{\alpha+3}+A_4x^{\alpha+4}+\text{etc.},$$

et substituant cette expression dans l'équation proposée, il viendra

$$0=\left.\begin{array}{r}A_0\alpha(\alpha-1)\\+A_0\alpha\end{array}\right|x^{\alpha-2}+\left.\begin{array}{r}A_1(\alpha+1)\alpha\\+A_1(\alpha+1)\end{array}\right|x^{\alpha-1}+\left.\begin{array}{r}A_2(\alpha+2)(\alpha+1)\\+A_2(\alpha+2)\\+A_0\end{array}\right|x^\alpha$$
$$+\left.\begin{array}{r}A_3(\alpha+3)(\alpha+2)\\+A_3(\alpha+3)\\+A_1\end{array}\right|x^{\alpha+1}+\left.\begin{array}{r}A_4(\alpha+4)(\alpha+3)\\+A_4(\alpha+4)\\+A_2\end{array}\right|x^{\alpha+2}+\text{etc.}$$

On fait disparaître le premier terme du second membre en faisant $\alpha=0$ sans déterminer A_0; mais alors le second terme ne disparaît pas, à moins que l'on ne fasse $A_1=0$. De même on fait disparaître le second terme en posant $\alpha=-1$, le coefficient A_1 demeurant indéterminé, mais alors le premier terme ne disparaîtra pas, à moins qu'on ne suppose $A_0=0$. Si l'on fait donc $\alpha=0$, les coefficients seront déterminés par les équations

$A_0 = A_0$, d'où l'on déduit $A_0 = A_0$

$A_1 = 0$	$A_1 = 0$
$-A_2 = \frac{A_0}{2+2}$	$A_2 = -\frac{A_0}{4} = -\frac{A_0}{2^2}$
$-A_3 = \frac{A_1}{6+3}$	$A_3 = 0$
$-A_4 = \frac{A_2}{12+4}$	$A_4 = \frac{A_0}{4.16} = \frac{A_0}{2^2.4^2}$
$-A_5 = \frac{A_3}{20+5}$	$A_5 = 0$
$-A_6 = \frac{A_4}{30+6}$	$A_6 = -\frac{A_0}{4.16.36} = -\frac{A_0}{2^2.4^2.6^2}$.
etc.	etc.

On satisfera donc à l'équation proposée par la série

$$y = A_0\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.}\right).$$

Quant à la supposition de $\alpha = -1$, il est aisé de reconnaître qu'elle conduirait à la même série que l'on vient de trouver. On n'obtient encore ici qu'une formule propre à donner des intégrales particulières, mais non l'intégrale générale de l'équation proposée.

465. Lorsque la substitution d'une série ascendante de la variable x dans l'équation différentielle ne donne qu'une valeur particulière, cela tient généralement à ce que l'intégrale complète doit contenir des termes affectés du logarithme de cette variable. Ayant trouvé, par exemple, pour l'équation précédente

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

a valeur particulière

$$Y' = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.}$$

on posera, pour obtenir l'intégrale complète, conformément à ce qu'on a vu dans les nos 442 et 443, $y = AY'$, A désignant une fonction de x, ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} = A\frac{dY'}{dx} + \frac{dA}{dx}Y',$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\frac{d^2Y'}{dx^2} + 2\frac{dA}{dx}\frac{dY'}{dx} + \frac{d^2A}{dx^2}Y'.$$

Mettant ces valeurs dans l'équation précédente, et supprimant les termes affectés de A dont la somme est nulle, il restera pour déterminer A l'équation

$$Y'\frac{d^2A}{dx^2} + \left(2\frac{dY'}{dx} + \frac{Y'}{x}\right)\frac{dA}{dx} = 0,$$

qui devient, en posant $\frac{dA}{dx} = t$,

$$Y'\frac{dt}{dx} + \left(2\frac{dY'}{dx} + \frac{Y'}{x}\right)t = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{t} + \frac{2dY'}{Y'} + \frac{dx}{x} = 0,$$

d'où l'on tire $t = \frac{1}{xY'^2}$, et par conséquent $A = \int \frac{dx}{xY'^2}$.

On en conclut que l'expression de l'intégrale complète est

$$y = Y'\left(a + b\int \frac{dx}{xY'^2}\right),$$

a et b étant les deux constantes arbitraires. D'ailleurs

$$\int \frac{dx}{xY'^2} = \int \frac{dx}{x}(1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \text{etc.}) = lx + \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4} + \text{etc.},$$

a, b, etc., désignant des coefficients numériques qu'il est facile de déterminer. Cette expression devient donc

$$y=\left(1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\text{etc.}\right)\left[a+b\left(lx+\frac{ax^2}{2}+\frac{6x^4}{4}+\text{etc.}\right)\right].$$

XXXVI. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES ORDINAIRES DU PREMIER ORDRE A TROIS VARIABLES.

466. Soit proposée l'équation différentielle

$$Pdx+Qdy+Rdz=0,$$

dans laquelle P, Q, R désignent des fonctions quelconques des trois variables x, y, z. Si cette équation est le résultat immédiat de la différentiation d'une équation primitive $F(x, y, z)=0$, son premier membre satisfera aux conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles du premier ordre à trois variables, et on pourra en trouver l'intégrale, qui devra être complétée par une constante arbitraire.

Mais si l'équation proposée résulte de l'élimination d'une constante entre l'équation primitive $F(x, y, z)=0$, et l'équation differentielle qui s'en déduit immédiatement, ou si l'on a supprimé après la différentiation un facteur commun à tous les termes, elle ne satisfera plus en général aux conditions d'intégrabilité. Néanmoins cette équation ayant été déduite d'une relation donnée entre les trois variables x, y, z, dont deux d'entre elles, par exemple x et y, peuvent être regardées comme indépendantes, et la troisième z comme fonction de ces deux-ci, il s'ensuit que tirant la valeur de dz qui sera

$$dz=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}dy,$$

expression doit satisfaire à la condition générale de
ession de la différentielle des fonctions de deux varia-
ndépendantes; en sorte que l'on doit avoir

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{P}{R}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{R}\right),$$

n faisant attention que z est contenu dans les fonctions
et R,

$$R\left(\frac{dP}{dy}+\frac{dP}{dz}\frac{dz}{dy}\right)-P\left(\frac{dR}{dy}+\frac{dR}{dz}\frac{dz}{dy}\right)$$
$$=R\left(\frac{dQ}{dx}+\frac{dQ}{dz}\frac{dz}{dx}\right)-Q\left(\frac{dR}{dx}+\frac{dR}{dz}\frac{dz}{dx}\right).$$

t pour $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ leurs valeurs $-\frac{P}{R}$ et $-\frac{Q}{R}$ et réduisant,
t

$$P\frac{dR}{dy}-P\frac{dQ}{dz}+Q\frac{dP}{dz}-Q\frac{dR}{dx}+R\frac{dQ}{dx}-R\frac{dP}{dy}=0.$$

quation exprime la condition nécessaire pour que l'on
regarder dans l'équation proposée deux quelconques
iables comme indépendantes, et la troisième comme
ıction des deux autres. On pourra alors considérer
on dont il s'agit comme appartenant à une surface.

Lorsque l'équation de condition que l'on vient d'obte-
nit une valeur de z, par exemple, en fonction de x, y,
quelle on ait

$$Pdx+Qdy+Rdz=0,$$

ouve satisfaire à cette dernière équation sans avoir eu
ıtégrer. Mais quand l'équation de condition indiquée
ée identiquement (et elle doit l'être si l'équation diffé-

rentielle a une intégrale $F(x, y, z) = 0$ contenant une constante arbitraire qui n'entre pas dans P, Q, R), alors la recherche de l'intégrale se ramène à l'intégration d'une équation à deux variables seulement. En effet, regardons la variable z comme constante, et supposons par conséquent $dz = 0$; l'équation proposée se réduit alors à

$$Pdx + Qdy = 0,$$

qui appartient à une section quelconque faite dans la surface par un plan parallèle au plan des xy, à une distance de ce plan marquée par la valeur constante attribuée à la coordonnée z, dans les fonctions P et Q. Si l'on parvient à intégrer cette équation en rendant son premier membre une différentielle exacte en x et y au moyen d'un facteur λ, il faudra regarder la constante qui complétera cette intégrale comme une fonction de z: nous représenterons donc l'intégrale dont il s'agit par

$$\varphi(x, y, z) = Z,$$

Z désignant une fonction de z seule. Or, en différentiant cette dernière équation en y faisant varier x, y, z, il viendra

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = dZ,$$

c'est-à-dire

$$\lambda(Pdx + Qdy) + \frac{d\varphi}{dz}dz = dZ.$$

De cette équation combinée avec

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

je tire

$$dZ = \left(\frac{d\varphi}{dz} - \lambda R\right)dz;$$

ıme Z est une fonction de z seule, le second mem-
it se réduire aussi à une telle fonction en éliminant une
'iables x, y, au moyen de l'équation $\varphi(x, y, z) = Z$; la
: x ou y étant chassée ainsi, l'autre y ou x doit dispa-
'elle-même, en sorte qu'il ne restera qu'une équation
tielle entre z et Z. Cette équation étant intégrée,
ı l'expression de Z en z, avec une constante arbitraire;
emplaçant Z par cette expression dans l'équation
$) = Z$, on aura l'intégrale cherchée.

Soit proposée, par exemple, l'équation différentielle
,

$$(2xz+z^3)dx+2yzdy-2(x^2+y^2+b)dz=0,$$

uelle l'équation de condition du n° 466 est identique
rdant z comme constante, elle se réduit à

$$(2x+z^2)dx+2ydy=0,$$

iables sont séparées, et dont l'intégrale est

$$x^2+y^2+xz^2=Z,$$

:onstante arbitraire, que nous regardons ici comme
on de z. Différentiant cette dernière équation en
t varier, il vient

$$(2x+z^2)dx+2ydy+2xzdz=dZ,$$

eut changer, en ayant égard à l'équation propo-

$$2\frac{x^2+y^2+b}{z}dz+2xzdz=dZ.$$

dans cette équation y^2 par sa valeur déduite de

l'équation $x^2+y^2+xz^2=Z$, la variable x disparaîtra, et il viendra simplement

$$2\frac{Z+b}{z}dz=dZ, \quad \text{ou} \quad \frac{2dz}{z}=\frac{dZ}{Z+b},$$

équation dont l'intégrale est

$$az^2=Z+b,$$

a désignant la constante arbitraire. Mettant donc pour Z la valeur qui se déduit de cette équation dans $x^2+y^2+xz^2=Z$, il viendra

$$x^2+y^2+(x-a)z^2+b=0,$$

qui est l'intégrale cherchée.

469. Lorsque l'équation différentielle proposée

$$Pdx+Qdy+Rdz=0,$$

ne satisfait pas à l'équation de condition du n° 466, d'où l'on conclut qu'il n'est pas possible d'y regarder deux des variables comme indépendantes, et la troisième comme une fonction de celles-ci, on ne peut attribuer un sens analytique à cette équation qu'en admettant que deux des variables sont liées par une relation inconnue, mais existante. On devra donc supposer, par exemple, que x et y ont entre elles une relation exprimée par une équation telle que $\varphi(x, y)=0$, d'après laquelle l'équation proposée se réduirait à une équation à deux variables seulement, et pourrait être intégrée en conséquence, après la détermination de la fonction φ. Dans un tel cas l'équation dont il s'agit ne peut

ée comme appartenant à une surface. La fonc-
nnée des courbes, en nombre infini, que l'on
avoir tracé arbitrairement sur le plan des xy
de ces courbes qui sont représentées par
$y)=0$.

. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES
DU PREMIER ORDRE.

eux variables indépendantes x et y et une
le z qui est regardée comme une fonction
res : $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ représenteront les coefficients
iels de la fonction z pris respectivement par
à y; en sorte que si x augmente de dx,
le z sera $\frac{dz}{dx}dx$; et si y augmente de dy,
le z sera $\frac{dz}{dy}dy$. Une équation aux diffé-
du premier ordre entre les trois variables
en général une relation entre les quan-
, $\frac{dz}{dy}$, et peut être représentée par

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right)=0,$$

'une fonction quelconque. Il s'agit de con-
ion d'une telle équation, et comment peut
ation primitive à laquelle elle doit corres-

variables indépendantes x, y peuvent être

regardées comme deux abscisses rectangulaires horizontales, et la variable z comme une ordonnée verticale. Ainsi z étant regardée comme une fonction de x et y, une relation entre ces trois variables sera considérée comme l'équation d'une surface définie par l'équation proposée.

Cela posé, étant donnée l'équation

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

supposons que l'on cherche à construire la surface qu'elle doit représenter. On déduira de cette équation la valeur de l'une quelconque des quantités $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ lorsque les quatre autres auront été données; par conséquent, on peut concevoir que la construction s'opère de la manière suivante. Traçons dans le plan des xz une courbe quelconque que nous regarderons comme l'intersection de la surface cherchée par ce plan. Pour un point quelconque de cette courbe, on connaîtra x, y dont la valeur est nulle, z et $\frac{dz}{dx}$: l'équation proposée donnant $\frac{dz}{dy}$, la direction du plan tangent à la surface cherchée est déterminée dans toute l'étendue de la courbe dont il s'agit. Si donc on conçoit un plan mené parallèlement au plan des xz à une distance très-petite Δy, on connaîtra l'intersection de la surface par ce plan avec une exactitude d'autant plus grande que Δy sera plus petite. On pourra se servir de cette intersection pour construire de la même manière une nouvelle intersection avec un second plan mené à la distance Δy du premier; et ainsi de suite. Ainsi la surface est en général déterminée dans toute son

oyen de l'équation différentielle, lorsqu'on
traitement l'intersection de cette surface par
le au plan des xz. Il est évident d'ailleurs
, également si l'on se donnait l'intersection
r un plan parallèle aux yz.
ir, par ce qui précède, que l'équation diffé-
ée appartient à une infinité de surfaces diffé-
toutes un caractère commun exprimé par
La figure de chaque surface dépend de celle
itraire par laquelle on l'a fait passer. Si l'on
ale de l'équation proposée ait une significa-
ue que cette équation elle-même, elle doit
es les surfaces dont il s'agit. Cette inté-
condition de satisfaire à l'équation diffé-
ée, doit donc contenir une fonction arbi-

mait la vérité de cette proposition en re-
l'on a une équation primitive contenant une
ninée, on peut toujours en déduire une
nier ordre où cette fonction ait entièrement
exemple l'équation

$$F[x, y, z, \varphi(u)] = 0,$$

t φ sont des signes de fonction, et u repré-
e fonction de x, y, z. En différentiant suc-
apport à x et à y, il viendra

$$\frac{z}{x} + \frac{dF}{d.\varphi(u)} \frac{d.\varphi(u)}{du}\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{z}{y} + \frac{dF}{d.\varphi(u)} \frac{d.\varphi(u)}{du}\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Éliminant ensuite $\varphi(u)$ et $\frac{d\varphi(u)}{du}$ entre ces deux équations et l'équation primitive, il restera une équation différentielle du premier ordre dans laquelle la fonction φ n'entrera point. Cette équation exprimera une relation qui subsiste quelle que soit la forme qui, dans l'équation primitive, pourrait être attribuée à la fonction φ.

472. Considérons en général une équation primitive

$$F(x, y, z, a, b) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dans laquelle a, b désignent deux constantes. En différentiant successivement par rapport à x et à y, on aura les deux équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

et l'on pourra éliminer les constantes a et b, entre ces équations et l'équation primitive. On obtiendra de cette manière une équation différentielle du premier ordre dans laquelle ces constantes auront disparu, et qui par conséquent exprimera une propriété entièrement indépendante des valeurs particulières qui pourraient leur être attribuées. Nous représenterons cette équation par

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

On voit, en premier lieu, qu'étant donnée l'équation (3), on peut lui chercher une intégrale, ou équation primitive, qui contienne deux constantes arbitraires.

regarde a, dans l'équation (1), comme une
ıle, et b comme une fonction de a, les deux
rentielles qui en dériveront seront alors

$$\frac{dz}{dx}+\left(\frac{dF}{da}+\frac{dF}{db}\frac{db}{da}\right)\left(\frac{da}{dx}+\frac{da}{dz}\frac{dz}{dx}\right)=0,$$
$$\frac{dz}{dx}+\left(\frac{dF}{da}+\frac{dF}{db}\frac{db}{da}\right)\left(\frac{da}{dy}+\frac{da}{dz}\frac{dz}{dy}\right)=0.$$

uations ne différeront point des équations (2),
ınt que l'on ait l'équation

$$\frac{dF}{da}+\frac{dF}{db}\frac{db}{da}=0.$$

(1) conduira toujours à la même équa-
nces partielles (3), lorsqu'on y regardera a
, et b comme une fonction quelconque de a,
oit pris de manière à satisfaire à l'équation

0.

qu'étant donnée une équation aux diffé-
du premier ordre, si l'on a trouvé une
ve $F=0$ avec deux constantes arbitraires
ıfasse à cette équation, on aura une solu-
us étendue, en prenant $b=\varphi(a)$, et déter-
uation $\frac{dF}{da}+\frac{dF}{db}\frac{db}{da}=0$. La fonction φ est
aire qui donne à la solution la généralité

ı de remarquer que l'on pourrait égale-
ation primitive (1), regarder a et b comme

deux quantités variables indépendantes l'une de l'autre, et que l'on aurait alors les deux équations dérivées,

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx}+\frac{da}{dz}\frac{dz}{dx}\right)+\frac{dF}{db}\left(\frac{db}{dx}+\frac{db}{dz}\frac{dz}{dx}\right)=0,$$
$$\frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dy}+\frac{da}{dz}\frac{dz}{dy}\right)+\frac{dF}{db}\left(\frac{db}{dy}+\frac{db}{dz}\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

que l'on ramène aux équations (2) en posant

$$\frac{dF}{da}=0, \quad \text{et} \quad \frac{dF}{db}=0.$$

Par conséquent si l'équation primitive $F=0$, contenant les deux constantes arbitraires a et b, satisfait à une équation aux différences partielles proposée, on voit que l'on y satisfera encore en mettant à la place de a et b dans cette équation les deux valeurs en x, y, z de ces quantités tirées des équations $\frac{dF}{da}=0$, $\frac{dF}{db}=0$. Mais le résultat que l'on obtiendrait ainsi ne contient pas de fonction arbitraire, et il ne donne qu'une solution ou une intégrale particulière de l'équation proposée.

474. Dans la géométrie, l'équation (1), avec deux constantes arbitraires, représente une infinité de surfaces correspondantes à toutes les valeurs que l'on peut attribuer à ces constantes, et auxquelles appartient toujours l'équation aux différences partielles (3). Lorsque l'on prend $b=\varphi(a)$, φ étant le signe d'une fonction quelconque, on considère la série de surfaces qui résulte de la fonction φ lorsque l'on attribue à a toutes les valeurs possibles depuis $-\frac{1}{0}$ jusqu'à $+\frac{1}{0}$. Or,

place de a, dans l'équation $F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0$,
$- da$, le résultat, que nous représenterons par

$= 0$, appartiendra à une surface comprise dans

et infiniment voisine de la surface représentée
on $F = 0$. Donc le système de ces deux équations
$+ \frac{dF}{da} da = 0$, ou simplement $F = 0$ et $\frac{dF}{da} = 0$
première fait disparaître le premier terme de la
and on les regarde comme subsistant ensemble),
à la ligne d'intersection des deux surfaces consé-
ne que nous désignerons, d'après *Monge*, par le
ractéristique. Et si l'on élimine entre les deux
lont il s'agit, la quantité a, le résultat, qui sera
on entre x, y, z, appartiendra à la surface lieu de
d'intersection, c'est-à-dire à la surface enveloppe
es qui résultent de l'équation $F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0$,
donne à a toutes les valeurs possibles. Or, l'équa-
entielle proposée doit évidemment appartenir à
ce enveloppe, puisque le plan tangent étant tou-
nun aux enveloppées et à l'enveloppe, les valeurs
$\frac{z}{y}$, qui déterminent la direction de ce plan, leur
alement être communes. Après que l'on a mis $\varphi(a)$
de b, l'équation $\frac{dF}{da} = 0$ ne diffère point de l'équa-
$\frac{dF}{db} \frac{db}{da} = 0$ du n° 472. On retrouve donc la solu-
ale de l'équation proposée, exprimée par le sys-
équations $F(x, y, z, a, b) = 0$ et $\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db} \frac{db}{da} = 0$,

en mettant une fonction quelconque $\varphi(a)$ à la place de b, puis éliminant a entre ces deux équations.

475. De plus, si dans l'équation $F(x, y, z, a, b) = 0$ on fait varier la quantité a seule, ce qui donne $F + \frac{dF}{da} da = 0$; puis la quantité b seule, ce qui donne $F + \frac{dF}{da} db = 0$, le système des équations $F = 0$ et $\frac{dF}{da} = 0$ représentera une caractéristique appartenant à une certaine surface enveloppe; et le système des équations $F = 0$ et $\frac{dF}{db} = 0$ représentera une autre caractéristique appartenant à une autre surface enveloppe infiniment voisine de la première. Donc le système des trois équations $F = 0$, $\frac{dF}{da} = 0$, $\frac{dF}{db} = 0$ appartiendra aux points d'intersection de ces deux caractéristiques; et par conséquent, si l'on élimine a et b entre ces trois équations, l'équation en x, y, z qui en résultera, représentera la surface lieu de tous ces points d'intersection, c'est-à-dire une surface qui touche et enveloppe elle-même toutes les enveloppes dont il a été question ci-dessus, et qui est touchée par toutes les caractéristiques; surface à laquelle l'équation différentielle proposée doit encore appartenir, mais qui ne répond évidemment qu'à une solution particulière de cette équation.

Nous ajouterons qu'il existe généralement plusieurs équations différentes, analogues à l'équation (1) du n° 472, contenant deux constantes arbitraires, qui peuvent conduire à la même équation différentielle (3), et produire les mêmes surfaces enveloppes auxquelles répondront l'intégrale générale de cette équation et la solution particulière dont il vient d'être question.

ration des équations linéaires aux différences partielles du premier ordre.

Une équation aux différences partielles est linéaire son second membre étant rendu nul, l'autre est une ı du premier degré des coefficients différentiels. Lè plus simple est celui où l'équation exprime l'égalité d'une somme de produits de ces coefficients multi- par des constantes. Les équations de ce genre ont la iété d'être satisfaites par la somme d'un nombre quel- ıe de valeurs particulières, propriété qui donne immément l'intégrale.

ıit en effet l'équation

$$P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=0,$$

ns laquelle P et Q sont des nombres constants. Prenant ıur valeur particulière (m et n étant des constantes)

$$z=e^{mx+ny},\quad \text{d'où}\quad \frac{dz}{dx}=m.e^{mx+ny},\quad \frac{dz}{dy}=n.e^{mx+ny},$$

et substituant cette valeur dans l'équation proposée, il vient

$$mP+nQ=0,\quad \text{d'où}\quad n=-\frac{mP}{Q}.$$

La valeur $z=e^{m\left(x-\frac{Py}{Q}\right)}$, ou $z=e^{m(Qx-Py)}$, dans laquelle m demeure indéterminée, satisfait donc à l'équation proposée. Ainsi, l'on peut prendre pour expression de la fonction z une série formée d'un nombre quelconque de termes, telle que

$$z=A_1e^{m_1(Qx-Py)}+A_2e^{m_2(Qx-Py)}+A_3e^{m_3(Qx-Py)}+\text{etc.},$$

dans laquelle m_1, m_2, m_3, etc., A_1, A_2, A_3, etc., désignent des constantes entièrement arbitraires. Or il est visible qu'une telle série équivaut à une fonction arbitraire de la quantité $Qx - Py$ qui se trouve dans tous les termes. La formule précédente peut donc s'écrire

$$x = \varphi(Qx - Py),$$

φ étant le signe d'une fonction arbitraire, et l'on aura ainsi l'intégrale générale de l'équation proposée. On vérifie en effet, que cette expression de z satisfait à l'équation dont il s'agit.

477. L'équation

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = z,$$

dans laquelle P, Q désignent toujours des nombres constants, s'intègre de la même manière. La substitution de la valeur particulière $z = e^{mx+ny}$ donne pour équation de condition

$$mP + nQ = 1, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{1 - nQ}{P}, \quad \text{ou} \quad n = \frac{1 - mP}{Q}.$$

Ainsi les expressions

$$z = e^{\frac{y}{Q} + m\left(x - \frac{Py}{Q}\right)} \quad \text{et} \quad z = e^{\frac{x}{P} + n\left(y - \frac{Qx}{P}\right)},$$

dans lesquelles les constantes m ou n demeurent arbitraires, satisferont à l'équation proposée. Cette équation sera également satisfaite par les valeurs

$$z = e^{\frac{y}{Q}} . e^{m(Qx - Py)} \quad \text{et} \quad z = e^{\frac{x}{P}} . e^{n(Py - Qx)},$$

et par conséquent par les deux séries

$$[A_1 e^{m_1(Qx-Py)} + A_2 e^{m_2(Qx-Py)} + A_3 e^{m_3(Qx-Py)} + \text{etc.}],$$

$$\overline{P}\,[B_1 e^{n_1(Py-Qx)} + B_2 e^{n_2(Py-Qx)} + B_3 e^{n_3(Py-Qx)} + \text{etc.}],$$

squelles A_1, A_2, etc., m_1, m_2, etc., B_1, B_2, etc., , etc., représentent des coefficients arbitraires. Ces équivalent aux expressions

$$z = e^{\frac{y}{Q}} . \varphi(Qx - Py), \qquad z = e^{\frac{x}{P}} . \psi(Py - Qx),$$

étant les signes de fonctions arbitraires. Il est aisé de maître que la même surface peut être également représée par ces deux expressions. L'une ou l'autre est l'intégrale générale de l'équation proposée.

78. Considérons maintenant l'équation

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R, \qquad (1)$$

ans laquelle P, Q, R désignent des fonctions quelconques es variables x, y, z. Représentons par

$$f(x, y, z) = 0$$

une intégrale de cette équation. En la différentiant successivement par rapport à x et y, il viendra

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}},$$

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dy}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}},$$

et comme ces valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ doivent satisfaire à l'équation proposée, on trouve, en les y substituant, l'équation

$$P\frac{df}{dx}+Q\frac{df}{dy}+R\frac{df}{dz}=0. \qquad (2)$$

En différentiant complétement l'équation $f(x, y, z)=0$, on a d'ailleurs

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0. \qquad (3)$$

Prenant dans cette équation la valeur de $\frac{df}{dx}$ et la substituant dans l'équation précédente, il viendra

$$(Pdy-Qdx)\frac{df}{dy}+(Pdz-Rdx)\frac{df}{dz}=0. \qquad (4)$$

Maintenant j'observe que l'équation (4), considérée en elle-même, indépendamment de ce qui précède, est évidemment satisfaite, quelle que soit la fonction $f(x, y, z)$, par les valeurs de x, y, z qui vérifient les équations

$$Pdy-Qdx=0,$$
$$Pdz-Rdx=0.$$

Ces deux équations aux différences ordinaires, qui du reste entraînent celle-ci $Qdz-Rdy=0$, de manière qu'on peut les écrire

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R},$$

ion intime avec l'équation aux différences par-
osée. Admettons que de ces équations, ou d'une
n quelconque de ces équations, on ait réussi à
ux équations primitives ou intégrales, contenant
antes arbitraires, et que nous désignerons par

$$M = a \qquad \text{et} \qquad N = b,$$

ant les deux constantes arbitraires, et M, N des
de x, y, z. Les valeurs de x, y, en z, a, b,
ournissent, vérifient l'équation (4), quelles que
constantes a, b et la fonction f; et il est clair de
lles réduiront à une constante toute fonction de
la forme $\Phi(M, N)$, car par la substitution elles la
nt en $\Phi(a, b)$. Si donc on prenait pour $f(x, y, z)$
fonction, on aurait $df = 0$, c'est-à-dire l'équa-
aurait lieu en même temps que l'équation (4). Or
ipliant l'équation (3) par P et en en retranchant
n (4), on arrive à l'équation (2). Celle-ci est donc
quand on pose $f = \Phi(M, N)$, et même elle l'est
cune intervention des équations $M = a$, $N = b$, car
des constantes arbitraires a et b, on peut faire ré-
à une valeur de z à volonté des valeurs de x et y
volonté. En d'autres termes, on vérifie l'équation
posant $f = \Phi(M, N)$ et regardant x, y, z comme
iables indépendantes. Ainsi l'équation $f(x, y, z) = 0$,
forme citée de f, vérifiera l'équation (1); on s'en
en remontant de l'équation (2) à l'équation (1) par
lcul inverse de celui qui a conduit de l'équation (1)
ation (2). Donc, enfin, l'intégrale générale de l'équa-
1) est

$$\Phi(M, N) = 0, \quad \text{ou si l'on veut} \quad N = \varphi(M),$$

Φ ou φ désignant une fonction arbitraire.

479. Les notions géométriques indiquées dans le n° 474, conduisent au même résultat. Remarquons qu'à l'équation proposée

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R, \qquad (I)$$

se réunit toujours l'équation

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy.$$

Éliminant $\frac{dz}{dx}$, ou $\frac{dz}{dy}$, on trouve les deux équations distinctes

$$(Pdy - Qdx)\frac{dz}{dx} = Rdy - Qdz,$$

$$(Pdy - Qdx)\frac{dz}{dy} = Pdz - Rdx.$$

Admettons à présent que x, y, z désignent les coordonnées d'un point quelconque de la caractéristique, et que les différentielles dx, dy, dz soient prises sur cette ligne. Comme elle résulte de l'intersection de deux surfaces consécutives qui satisfont à l'équation (1), les deux équations ci-dessus devront avoir lieu pour les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ qui appartiennent à l'une ou à l'autre de ces surfaces. Or les équations du premier degré ne peuvent avoir plus d'une racine sans devenir identiques. On a donc pour la caractéristique les trois

$$Pdy - Qdx = 0,$$
$$Pdz - Rdx = 0,$$
$$Qdz - Rdy = 0,$$

quelconques entraînent la troisième. Si l'on dé-
équations différentielles deux équations primi-
ı forme

$$M = a, \qquad N = b,$$

ıteront toutes les caractéristiques possibles en y
r à volonté les constantes a et b. Mais si l'on re-
nme une fonction quelconque φ de la quantité a,
uations

$$M = a, \qquad N = \varphi(a),$$

ıteront plus que la série des caractéristiques qui
ninée par la nature de la fonction φ lorsqu'on fera
puis $-\frac{1}{0}$ jusqu'à $+\frac{1}{0}$. Enfin si l'on élimine a
leux dernières équations, le résultat de cette éli-
qui est

$$N = \varphi(M),$$

lra à la surface lieu de cette série de caractéristi-
t-à-dire, vu l'indétermination de la fonction φ, à
conque des surfaces enveloppes auxquelles appar-
ıation proposée, et qui sont représentées par son
générale.

480. On a supposé, dans ce qui précède, que l'on pourrait déduire des équations différentielles de la caractéristique (qui sont aussi celles dont on s'est servi au n° 478) deux équations primitives $M = a$ et $N = b$ ou $N = \varphi(a)$. Cela nous était permis. En effet, si l'on considère deux de ces équations différentielles, telles que

$$Pdz - Rdx = 0,$$
$$Qdz - Rdy = 0,$$

on remarquera que puisqu'elles appartiennent à une courbe, on ne peut plus y regarder qu'une seule des variables comme indépendante. Prenons, par exemple, z pour variable indépendante : ces deux équations contiendront, outre les variables x, y, z, l'une $\frac{dx}{dz}$, l'autre $\frac{dy}{dz}$. Différentiant la première on aura une équation du second ordre contenant $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ et $\frac{d^2x}{dz^2}$. On a donc maintenant trois équations entre lesquelles on peut éliminer y et $\frac{dy}{dz}$: le résultat de l'élimination sera une équation aux différences ordinaires du second ordre entre les variables x et z seules.

Cette équation, conformément à ce qu'on a vu n° 474, a nécessairement deux intégrales du premier ordre ayant chacune une constante arbitraire. Admettons que l'on obtienne ces intégrales qui contiendront toutes deux $\frac{dx}{dz}$. On pourra éliminer cette fonction au moyen de l'équation $P - R\frac{dx}{dz} = 0$, et il restera par conséquent deux équations contenant cha-

riables x, y, z et une constante arbitraire. Met-
ux équations sous la forme

$$M = a, \qquad N = \varphi(a),$$

ront, comme on l'a dit ci-dessus, l'intégrale géné-
quation

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R,$$

$$N = \varphi(M).$$

ar là que l'intégration de l'équation linéaire aux
s partielles du premier ordre à trois variables se
oujours à l'intégration d'une équation aux diffé-
linaires du second ordre à deux variables.
a méthode exposée dans le n° 478, s'applique égale-
cas où l'équation aux différences partielles propo-
ent un plus grand nombre de variables. Si cette
est

$$P\frac{dv}{dx} + Q\frac{dv}{dy} + R\frac{dv}{dz} = T, \qquad (I)$$

ait une intégrale représentée par

$$f(v, x, y, z) = 0,$$

entiant cette intégrale successivement par rapport
ables x, y, z, on en déduira

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dv}}, \qquad \frac{dv}{dy} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dv}}, \qquad \frac{dv}{dz} = -\frac{\frac{df}{dz}}{\frac{df}{dv}}.$$

ce qui donne, en mettant ces valeurs dans l'équation primitive

$$T\frac{df}{dv}+P\frac{df}{dx}+Q\frac{df}{dy}+R\frac{df}{dy}=0. \qquad (II)$$

On a d'ailleurs, en différentiant l'équation $f=0$ par rapport à toutes les variables v, x, y, z,

$$\frac{df}{dv}dv+\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0. \qquad (III)$$

Éliminant $\frac{df}{dv}$ entre cette dernière équation et la précédente, on trouvera

$$(Tdx-Pdv)\frac{df}{dx}+(Tdy-Qdv)\frac{df}{dy}+(Tdz-Rdv)\frac{df}{dz}+0. \quad (IV)$$

A présent j'observe que cette dernière équation, prise en elle-même, sera satisfaite quelle que soit la fonction f, si l'on pose

$$Tdx-Pdv=0,$$
$$Tdy-Qdv=0,$$
$$Tdz-Rdv=0;$$

d'où résultent les trois autres équations

$$Pdy-Qdx=0,$$
$$Pdz-Rdx=0,$$
$$Qdz-Rdy=0.$$

Si donc on trouve pour trois quelconques des équations dont il s'agit, trois intégrales telles que

$$L=a, \qquad M=b, \qquad N=c,$$

a, b, c désignant des constantes arbitraires, les valeurs de x, y, z en v, a, b, c, qui vérifient ces intégrales, satisferont à l'équation (IV), quelles que soient les constantes a, b, c et la fonction f De plus, si l'on prend $f = \Phi(L, M, N)$, elles réduiront f à une constante et donneront $df = 0$, en sorte que l'équation (III) aura lieu aussi. Remontant de là à l'équation (II), et se souvenant que a, b, c ont des valeurs quelconques, on verra que cette équation (II) est satisfaite en posant $f = \Phi(L, M, N)$ et regardant x, y, z comme des variables indépendantes. Et de là il suit aisément que l'équation (I) est vérifiée avec cette valeur de f, en faisant $f = 0$. On obtient ainsi l'intégrale cherchée de l'équation (I), sous la forme

$$\Phi(L, M, N) = 0, \qquad \text{ou} \qquad N = \varphi(L, M),$$

Φ ou φ désignant une fonction arbitraire.

On opérerait d'une manière semblable si le nombre des variables indépendantes était plus considérable.

482. On doit distinguer le cas où un terme manque dans l'équation aux différences partielles

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R,$$

parce qu'alors l'intégration ne dépend plus que de celle d'une équation aux différences ordinaires du premier ordre.

Supposons, par exemple, que le premier terme manque, et que l'on ait $P = 0$. Les équations de la caractéristique des n° 478 et 479, se réduisent à

$$dx = 0,$$
$$Qdz - Rdy = 0.$$

La première donne

$$x = a,$$

a désignant une constante arbitraire, ce qui indique que la caractéristique se trouve constamment dans un plan perpendiculaire à l'axe des x; x étant constante, on ne regardera plus comme variables dans la seconde équation que y et z. Soit

$$N = \varphi(a),$$

l'intégrale de cette équation. Mettant x à la place de a dans le second membre, l'intégrale cherchée sera donc

$$N = \varphi(x).$$

483. Nous pouvons appliquer la méthode précédente aux cas simples traités n°s 476 et 477. Dans le cas du n° 476, P et Q sont constantes, et $R = 0$. Les équations de la caractéristique deviennent

$$Pdy - Qdx = 0,$$
$$dz = 0.$$

Leurs intégrales sont

$$Py - Qx = a,$$
$$z = \varphi(a).$$

L'intégrale générale cherchée est donc, conformément à ce qu'on a vu dans le n° 478, et comme on l'a trouvée n° 476,

$$z = \varphi(Py - Qx).$$

484. Dans le cas du n° 477, l'équation proposée étant

$$P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=z\,,$$

t constantes et $R=z$. Les équations de la caracté-
viennent

$$\begin{aligned}Pdy-Qdx&=0\,,\\ Pdz-zdx&=0\,,\\ Qdz-zdy&=0.\end{aligned}$$

ègrent toutes trois, et donnent pour intégrales

$$\begin{aligned}&&&Py-Qx=a\,,\\ lz-x&=const. &\text{ou}\quad& z.e^{-\frac{x}{P}}=b\,,\\ lz-y&=const. &&z.e^{-\frac{y}{Q}}=c\,,\end{aligned}$$

ésignant trois constantes arbitraires. Ainsi, confor-
ce qu'on a vu n° 478, on pourra prendre pour l'in-
erchée

$$\frac{x}{P}=\varphi(Py-Qx)\qquad\text{ou}\qquad z.e^{-\frac{y}{Q}}=\psi(Py-Qx)\,,$$

ésignant toujours des fonctions arbitraires, ce qui
avec le résultat obtenu d'une autre manière n° 477.
a troisième équation qui résulterait de la combinai-
seconde des deux équations de la caractéristique
oisième, et qui serait

$$z.e^{-\frac{y}{Q}}=\varpi\left(z.e^{-\frac{x}{P}}\right),$$

le signe d'une fonction arbitraire, elle est comprise
deux autres, et ne donne rien de plus. En effet,

celles-ci indiquant que $z.e^{-\frac{x}{P}}$ et $z.e^{-\frac{y}{Q}}$ sont toutes deux fonctions de la même quantité $Py - Qx$, il en résulte nécessairement que les deux quantités dont il s'agit sont fonctions l'une de l'autre. On a déjà remarqué d'ailleurs que ces deux premières équations expriment la même chose, et équivalent entièrement l'une à l'autre.

485. Soit, comme nouvel exemple, l'équation très-simple

$$y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0.$$

Les équations de la caractéristique se réduisent à

$$ydy + xdx = 0, \qquad \text{d'où} \qquad y^2 + x^2 = a,$$
$$dz = 0, \qquad\qquad z = \varphi(a).$$

L'intégrale de l'équation proposée est donc

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

φ désignant une constante arbitraire. En effet, l'équation $y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0$ étant considérée dans la géométrie exprime que la projection sur le plan des xy de la normale à la surface à laquelle appartient cette équation passe toujours par l'origine des coordonnées; ou, si l'on veut, que la normale rencontre toujours l'axe des z. Cette propriété convient à toute surface de révolution dont l'axe coïncide avec l'axe des z, et ne convient qu'à une surface de ce genre. Or, il est visible que l'équation primitive $z = \varphi(x^2 + y^2)$ exprimant que l'ordonnée ne varie pas lorsque la quantité $x^2 + y^2$ demeure constante, ou que l'intersection de la surface par un

plan perpendiculaire à l'axe des z est un cercle, appartient également à toute surface de révolution décrite autour de l'axe des z par une ligne quelconque. Cette équation a le même degré de généralité que l'équation différentielle.

Une équation analogue à l'équation qui a été désignée par $F(x, y, z, a, b) = 0$ dans le n° 472, est ici

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = b^2,$$

qui représente une surface sphérique quelconque dont le centre est placé dans l'axe des z. Si l'on prend en effet les deux équations aux différences partielles du premier ordre, qui seront

$$x + (z - a)\frac{dz}{dx} = 0, \qquad y + (z - a)\frac{dz}{dy} = 0,$$

ce qui fait disparaître immédiatement la constante b, et si l'on élimine entre elles la constante a, on trouvera l'équation proposée $y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0$. Mais cette dernière équation n'appartient pas seulement à toute sphère dont le centre est placé sur l'axe des z. Elle appartient également à toute surface enveloppe des positions successives qu'occuperait une sphère dont le centre se déplacerait sur l'axe des z par la variation de la constante a, et dont le rayon b varierait en même temps suivant une loi quelconque exprimée par la relation $b = \varphi(a)$. Cette surface enveloppe, qui serait donnée par l'élimination de a entre les deux équations

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = \varphi(a), \qquad -2(z - a) = \frac{d.\varphi(a)}{da},$$

après la détermination de la fonction φ, serait évidemment

une surface de révolution dont l'axe coïnciderait avec l'axe des z. D'ailleurs la seconde des équations précédentes donne évidemment z fonction de a, ou $a = F(z)$. Mettant pour a cette valeur dans la première, on en déduira comme ci-dessus, $z = \Phi(x^2 + y^2)$.

On peut aussi regarder comme une intégrale avec deux constantes arbitraires de l'équation aux différences partielles proposée l'équation

$$x^2 + y^2 - a^2(z-b)^2 = 0,$$

qui représente la surface d'un cône droit quelconque dont l'axe coïncide avec l'axe des z. La constante b est l'ordonnée du centre du cône, et la constante a la tangente de l'angle compris entre l'axe des z et l'arête. En différentiant successivement par rapport à x et à y, il vient

$$x - a^2(z-b)\frac{dz}{dx} = 0, \qquad y - a^2(z-b)\frac{dz}{dy} = 0,$$

équations qui, par l'élimination des constantes a et b, donnent $y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0$. L'enveloppe des positions successives qu'occuperait le cône en faisant varier a dans l'équation $x^2 + y^2 - a^2[z - \varphi(a)]^2 = 0$ est évidemment une surface de révolution autour de l'axe des z dont la figure dépend de la fonction φ, et à laquelle appartiendra également l'équation différentielle proposée. L'équation de cette surface de révolution se trouvera en éliminant a entre les deux équations

$$x^2 + y^2 - a^2[z - \varphi(a)]^2 = 0, \qquad \text{et} \qquad z - \varphi(a) - a\frac{d.\varphi(a)}{da} = 0.$$

Or, la seconde indique que z est une fonction quelconque de a, et par conséquent a une fonction quelconque de z : d'où

l'on voit par la première que z doit être une fonction quelconque de x^2+y^2, comme on l'a trouvé ci-dessus.

486. Considérons encore l'équation

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=z.$$

Les équations de la caractéristique seront

$$\begin{aligned} xdy-ydx&=0,\\ xdz-zdx&=0,\\ ydz-zdy&=0. \end{aligned}$$

Toutes trois sont immédiatement intégrables, et on trouve en les intégrant

$$\frac{y}{x}=a,\qquad \frac{z}{x}=b,\qquad \frac{z}{y}=c,$$

a, b, c désignant toujours des constantes arbitraires. On peut donc prendre pour l'intégrale de l'équation proposée l'une ou l'autre des trois équations

$$\frac{x}{z}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\qquad \frac{z}{y}=\psi\left(\frac{y}{x}\right),\qquad \frac{z}{y}=\varpi\left(\frac{z}{x}\right),$$

dont la troisième est comprise dans les deux premières. Ainsi l'intégrale générale se forme ici de l'une ou de l'autre des expressions

$$z=x.\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\qquad z=y.\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dans la géométrie, l'équation proposée

$$x\frac{dz}{dy}+y\frac{dz}{dx}-z=0,$$

exprime que les plans tangents à la surface à laquelle appartient cette équation passent tous par l'origine O des coordonnées, propriété qui convient à toute surface conique dont cette origine est le centre ou sommet, et qui ne convient qu'à ces surfaces. Or, il est visible que les équations $\frac{z}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, ou $\frac{z}{y}=\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ caractérisent également les surfaces dont il s'agit, puisqu'elles expriment que les rapports $\frac{z}{x}$ ou $\frac{z}{y}$ demeurent constants en même temps que le rapport $\frac{y}{x}$; ou si l'on veut, que tout plan mené par l'axe des z coupe la surface suivant une ligne droite passant par le point O.

L'équation analogue à l'équation $F(x, y, z, a, b)=0$ du n° 472, est ici

$$ax+by-z=0,$$

qui appartient à un plan quelconque passant par l'origine des coordonnées, lorsqu'on y regarde a et b comme des constantes arbitraires. Ses deux équations différentielles du premier ordre sont

$$a-\frac{dz}{dx}=0, \quad \text{et} \quad b-\frac{dz}{dy}=0,$$

et donnent par l'élimination de a et b l'équation proposée; cette équation appartient non-seulement à ce plan, mais à toute surface enveloppe de l'espace que le plan parcourrait en le faisant mouvoir par la variation des constantes a et b, sans qu'il cessât de passer par l'origine des coordonnées, surface qui serait évidemment une surface conique dont l'origine des coordonnées serait le centre. On en aurait l'équation

en prenant $b = \varphi(a)$, et éliminant a entre les deux équations

$$ax + \varphi(a)y - z = 0 \qquad \text{et} \qquad x + \frac{d.\varphi(a)}{da}.y = 0.$$

Or, la seconde donne $\frac{x}{y}$ = *fonction* de a, ou a = *fonction* de $\frac{x}{y}$. On déduira donc de la première $\frac{z}{y}$ = *fonction* de $\frac{x}{y}$, conformément à ce qu'on a trouvé ci-dessus.

XXXVIII. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES, LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS, D'UN ORDRE QUELCONQUE.

487. Les équations dont nous allons nous occuper méritent une attention particulière, parce que c'est par leur moyen que les géomètres ont exprimé, dans les cas les plus simples, et que l'on peut appeler normaux, les lois générales des principaux phénomènes dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle. Elles ont pour caractère propre de pouvoir toujours être satisfaites par une infinité de solutions particulières, comprises dans une même formule, que l'on peut regarder comme une sorte de type analytique, auquel appartient la propriété dont l'équation différentielle est l'expression. L'ensemble de ces solutions donne sur-le-champ une intégrale générale dans laquelle il se trouve des quantités arbitraires, qu'il s'agit de déterminer ensuite d'une manière conforme aux conditions spéciales appartenant à chaque question.

Considérons, par exemple, l'équation du second ordre suivante entre les deux variables indépendantes x, y et la variable z supposée fonction des deux autres,

$$\mathrm{P}\frac{d^2z}{dx^2} + \mathrm{Q}\frac{d^2z}{dxdy} + \mathrm{R}\frac{d^2z}{dy^2} + \mathrm{S}\frac{dz}{dx} + \mathrm{T}\frac{dz}{dy} + \mathrm{U}z = 0,$$

dans laquelle P, Q, R, S, T, U représentent des quantités constantes quelconques. Nous aurons ici pour la valeur particulière qui satisfait à cette équation

$$z = e^{mx+ny},$$

m, n désignant des constantes, pourvu que ces constantes satisfassent elles-mêmes à l'équation de condition

$$Pm^2 + Qmn + Pn^2 + Sm + Tn + U = 0;$$

et comme cette équation permet de prendre arbitrairement l'une des deux quantités m ou n, on voit qu'il existe une infinité de systèmes de valeurs réelles ou imaginaires qui peuvent être attribuées à ces deux quantités, avec la condition de rendre l'expression $z = e^{mx+ny}$ propre à vérifier l'équation proposée.

Cette équation serait également vérifiée par la somme d'un nombre quelconque de valeurs semblables à la précédente, affectées chacune de coefficients constants quelconques. On peut donc écrire

$$z = Ae^{mx+ny} + A_1e^{m_1x+n_1y} + A_2e^{m_2x+n_2y} + \text{etc.},$$

et cette expression sera l'intégrale générale de l'équation proposée, si la série comprend tous les systèmes en nombre infini de valeurs de m et n qui satisfont ensemble à l'équation de condition précédente. Les coefficients constants A, A_1, A_2, etc., restent entièrement arbitraires. Cette expression de z doit être regardée comme ayant le même degré de généralité que l'équation différentielle elle-même.

Ces notions peuvent évidemment être étendues à toute équation différentielle du même genre, quel que soit le nombre des variables indépendantes et l'ordre de l'équation.

488. Les questions qui ont été résolues par l'intégration des équations aux différences partielles, appartenaient principalement à la théorie du mouvement de la chaleur, ou à la mécanique. Dans les premières, la température d'un point donné d'un corps est regardée comme une fonction du temps et des trois coordonnées de ce point. L'équation différentielle exprime certaines relations qui doivent subsister entre les coefficients différentiels partiels de cette fonction, relations qui dérivent immédiatement du principe de la communication de la chaleur et qui sont communes à toutes les questions. L'intégrale doit satisfaire à ces relations, et de plus à certaines conditions particulières, qui dépendent de la figure du corps, du mode d'échauffement ou de refroidissement, enfin de l'état initial des températures des divers points. Dans les questions de mécanique, où l'on considère le mouvement d'un système de corps, on regarde les coordonnées variables des points qui se déplacent, comme des fonctions du temps et de leurs coordonnées initiales. Les équations différentielles expriment les lois générales du mouvement. Les intégrales doivent satisfaire à ces équations, aux conditions particulières du système, et représenter, quand on y suppose le temps nul, l'état initial de repos ou de mouvement dans lequel ce système se trouvait à l'instant d'où le temps est compté. Pour donner, dans les cas les plus simples, une idée de la manière dont ces intégrales se forment, on considérera les questions suivantes.

489. Concevons, comme dans le n° 448, une barre cylindrique ou prismatique dont les dimensions transversales sont très-petites. Admettons que cette barre, d'une longueur déterminée, ait été primitivement échauffée d'une manière quelconque, puis placée dans un milieu dont la température

constante est zéro, et que ses deux extrémités soient aussi maintenues constamment, par une cause quelconque, à la température zéro. Il s'agit, l'état de température initial de la barre étant donné, de connaître les variations que subiront avec le temps les températures des divers points, jusqu'à ce que l'excès de chaleur qui lui avait été communiqué s'étant dissipé dans le milieu environnant, ces températures aient été toutes réduites à la température même du milieu. On nommera

Ω l'aire de la section transversale de la barre;

γ le périmètre de cette section;

x la distance d'une section quelconque à l'une des extrémités;

v la température qui a lieu dans cette section à la fin du temps t;

a la longueur de la barre;

K, h les conducibilités intérieure et extérieure;

C la chaleur spécifique;

D le poids de l'unité de volume.

La chaleur passe des parties les plus échauffées de la barre dans celles qui le sont le moins, en même temps qu'elle se dissipe, soit dans l'air environnant en traversant la surface de la barre, soit en s'écoulant par les deux extrémités maintenues à la température zéro. Si l'on considère l'élément du prisme dont la longueur est dx, et dont le volume est Ωdx, on reconnaît que la température de cet élément s'élevant de $\frac{dv}{dt}dt$ dans le temps dt, l'excès de la chaleur qu'il reçoit sur celle qu'il perd dans le même temps, doit être CD. $\Omega\, dx \frac{dv}{dt} dt$.

Or, la chaleur qu'il reçoit dans le temps dt par sa première extrémité est $-K.\Omega\frac{dv}{dt}dt$; celle qu'il transmet par l'extrémité opposée est $-K.\Omega\left(\frac{dv}{dt}+\frac{d^2v}{dx^2}dx\right)dt$; et celle qu'il perd au travers de sa surface est $h.\gamma dx.vdt$: d'où il suit que la chaleur qui reste dans l'élément est $\left(K.\Omega\frac{d^2v}{dx^2}-h\gamma.v\right)dxdt$. Égalant cette quantité de chaleur à celle qui est nécessaire pour produire l'élévation de température qui a lieu dans cet élément, il vient

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{CD}\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{h\gamma}{\Omega}v,$$

pour l'équation aux différences partielles qui exprime la loi du mouvement de la chaleur dans la barre.

Cette équation devient plus simple en posant $v=u.e^{-\frac{h\gamma}{\Omega}t}$, u désignant une nouvelle variable ; elle se réduit alors, en écrivant pour abréger k à la place de $\frac{K}{CD}$, à

$$\frac{du}{dt}=k\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Conformément à ce qu'on a vu dans le n° 487, on y satisfera par la valeur particulière $u=e^{mx+nt}$, pourvu que les constantes m et n vérifient l'équation $n=km^2$. Ainsi l'intégrale générale est

$$u=Ae^{mx+km^2t}+A_1e^{m_1x+km_1^2t}+A_2e^{m_2x+km_2^2t}+\text{etc.},$$

dans laquelle les constantes m, m_1, m_2, etc., et A, A_1, A_2, etc., sont entièrement indéterminées.

490. Cette intégrale, aussi bien que l'équation différentielle, appartient à toutes les questions où il s'agit du mouvement de la chaleur dans une barre prismatique dont les dimensions transversales sont très-petites, et qui est placée dans un milieu de température constante. Elle doit satisfaire, dans la question dont il s'agit ici, aux deux conditions suivantes : 1° que la valeur de v, et par conséquent celle de u, soient toujours nulles aux points extrêmes de la barre, c'est-à-dire pour les valeurs $x=0$, $x=a$; 2° qu'en supposant $t=0$ l'expression de v s'accorde avec l'état initial des températures. que l'on doit supposer donné sous cette forme $v=\varphi(x)$, φ désignant une fonction entièrement arbitraire.

L'expression précédente ne satisfera pas à la condition de donner $u=0$ pour les valeurs $x=0$ et $x=a$, en prenant pour les nombres m, m_1, m_2, etc., des valeurs réelles. Mais en leur attribuant des valeurs imaginaires $m\sqrt{-1}$, $m_1\sqrt{-1}$, $m_2\sqrt{-1}$, etc., et remplaçant chaque exponentielle imaginaire par sa valeur en sinus et cosinus d'arcs réels, on aura, au lieu de cette expression, la formule

$$u=(\mathrm{A}\sin.mx+\mathrm{B}\cos.mx)e^{-km^2t}+(\mathrm{A}_1\sin.m_1x+\mathrm{B}_1\cos.m_1x)e^{-km_1^2t}$$
$$+(\mathrm{A}_2\sin.m_2x+\mathrm{B}_2\cos.m_2x)e^{-km_2^2t}+\text{etc.},$$

dans laquelle on doit, pour lui conserver toute la généralité qu'elle comporte, donner des coefficients aux termes $\sin.mx.e^{-km^2t}$, $\cos.mx.e^{-km^2t}$, et ainsi des autres, parce que ces termes vérifient séparément, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, l'équation différentielle $\frac{du}{dt}=k\frac{d^2u}{dx^2}$. Mais dans le cas particulier dont il s'agit, nous devons nécessairement supposer nuls tous les coefficients B, B_1, B_2, etc., puisque

les termes qu'ils affectent ne peuvent se réduire à zéro lorsque l'on suppose $x=0$; et nous devons prendre simplement la partie de l'intégrale qui s'accorde avec cette condition; savoir :

$$u=A\sin.mx.e^{-km^2t}+A_1\sin.m_1x.e^{-km_1^2t}+A_2\sin.m_2x.e^{-km_2^2t}+\text{etc.}$$

Pour satisfaire ensuite à cette autre condition que $u=0$ lorsque $x=a$, il suffira de choisir, pour les nombres m, m_1, m_2, etc., des multiples exacts de la demi-circonférence divisée par a. Nous écrirons donc

$$u=A_1\sin.\frac{\pi x}{a}.e^{-\frac{k\pi^2}{a^2}t}+A_2\sin.\frac{2\pi x}{a}.e^{-\frac{k.2^2\pi^2}{a^2}t}+A_3\sin.\frac{3\pi x}{a}.e^{-\frac{k.3^2\pi^2}{a^2}}+\text{etc.}$$

et en concevant cette série prolongée à l'infini, le résultat présentera toute la généralité possible, avec les conditions que l'expression de u satisfasse à l'équation différentielle et donne $u=0$ lorsque $x=0$ et $x=a$.

491. Il reste à satisfaire à la condition qu'en faisant $t=0$, ce qui donne $v=u$, et

$$u=A_1\sin.\frac{\pi x}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x}{a}+A_4\sin.\frac{4\pi x}{a}+\text{etc.},$$

la série du second membre, prolongée à l'infini, reproduise la valeur de la fonction donnée et arbitraire $\varphi(x)$, par laquelle on suppose l'état initial des températures représenté; c'est-à-dire que les coefficients A_1, A_2, A_3, etc., qui restent encore arbitraires, doivent être déterminés par la condition que l'équation

$$\varphi(x)=A_1\sin.\frac{\pi x}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x}{a}+A_4\sin.\frac{4\pi x}{a}+\text{etc...},\quad(A)$$

subsiste pour une valeur quelconque de la variable x comprise entre $x=0$ et $x=a$.

Concevons que l'on ait partagé la longueur a de la barre en un nombre $n+1$ de parties égales, n étant un nombre entier très-grand, et qui tend à devenir infini, et désignons par $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ les abscisses des points de division. On posera les équations

$$\varphi(x_1)=A_1\sin.\frac{\pi x_1}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x_1}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x_1}{a}+\ldots+A_n\sin.\frac{n\pi x_1}{a},$$

$$\varphi(x_2)=A_1\sin.\frac{\pi x_2}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x_2}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x_2}{a}+\ldots+A_n\sin.\frac{n\pi x_2}{a},$$

$$\varphi(x_3)=A_1\sin.\frac{\pi x_3}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x_3}{a}+A_4\sin.\frac{3\pi x_3}{a}+\ldots+A_n\sin.\frac{n\pi x_3}{a},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\varphi(x_n)=A_1\sin.\frac{\pi x_n}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x_n}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x_n}{a}+\ldots+A_n\sin.\frac{n\pi x_n}{a},$$

qui doivent toutes subsister, et d'où l'on peut déduire les valeurs des coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$. Pour opérer l'élimination qui donnera la valeur du coefficient A_i appartenant au terme $A_i \sin.\frac{i\pi x}{a}$, on multipliera la première des équations précédentes par $\frac{a}{n+1}\sin.\frac{i\pi x_1}{a}$, la seconde par $\frac{a}{n+1}\sin.\frac{i\pi x_2}{a}$, la troisième par $\frac{a}{n+1}\sin.\frac{i\pi x_3}{a}$, etc., enfin la dernière par $\frac{a}{n+1}\sin.\frac{i\pi x_n}{a}$. On ajoutera ensuite toutes ces équations. Or, il est visible que le nombre n étant supposé infiniment grand, l'intervalle $\frac{a}{n+1}$ devient l'élément infiniment petit dx; et

1° La somme des premiers membres ne diffère point de l'intégrale définie $\int_0^a dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}\varphi(x)$.

2° Si l'on désigne par $A_j \sin.\frac{j\pi x}{a}$ un terme quelconque du second membre de l'équation (A), la somme des termes correspondants dans les équations précédentes ne diffère point de $A_j \int_0^a dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}\sin.\frac{j\pi x}{a}$.

3° Enfin la somme des termes contenant le coefficient A_i est $A_i \int_0^a dx.\sin^2.\frac{i\pi x}{a}$.

Remarquons maintenant que l'intégrale définie

$$\int_0^a dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}.\sin.\frac{j\pi x}{a},$$

est nulle tant que les nombres i et j sont des nombres entiers différents l'un de l'autre, puisque cette intégrale revient à

$$\frac{1}{2}\int_0^a dx\left[\cos.\frac{(i-j)\pi x}{a}-\cos.\frac{(i+j)\pi x}{a}\right].$$

Mais si les nombres i et j sont égaux, ou s'il s'agit de l'intégrale

$$\int_0^a dx.\sin.^2\frac{i\pi x}{a},$$

on trouve pour sa valeur $\frac{a}{2}$. Ainsi l'opération précédente a fait disparaître tous les termes, hors un seul, et il reste

pour déterminer le coefficient cherché, l'équation

$$\int_0^a dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}.\varphi(x)=A_i\frac{a}{2};$$

d'où l'on déduit

$$A_i=\frac{2}{a}\int_0^a dx.\sin.\frac{i\pi x}{a}.\varphi(x),$$

pour l'expression d'un coefficient quelconque dans le second membre de l'équation (A). Chacun de ces coefficients est donné par une intégrale définie sous le signe de laquelle entre la fonction arbitraire $\varphi(x)$. Cette intégrale représente l'aire d'une courbe que l'on forme en multipliant, dans l'intervalle compris entre $x=0$ et $x=a$, les ordonnées correspondantes des deux courbes qui seraient représentées par les équations $y=\varphi(x)$ et $y=\sin.\frac{i\pi x}{a}$: elle peut toujours être calculée, pourvu que l'ordonnée n'ait pas de valeurs infinies dans cet intervalle, circonstance qui n'a jamais lieu dans les questions physiques auxquelles s'applique cette analyse.

L'équation (A) devient donc (en mettant sous le signe des intégrales définies une autre variable α à la place de x),

$$\varphi(x)=\frac{2}{a}\Big[\sin.\frac{\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\sin.\frac{\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha)+\sin.\frac{2\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\sin.\frac{2\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha)$$
$$+\sin.\frac{3\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\sin.\frac{3\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha)+\text{etc.}\Big].$$

que l'on peut écrire, pour abréger

$$\varphi(x)=\frac{2}{a}\mathop{\mathrm{S}}_{=1}^{i=\infty}\sin.\frac{i\pi x}{a}\int_0^a d\alpha\sin.\frac{i\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha),$$

i désignant un nombre entier quelconque. On prouve d'ailleurs qu'une telle série est nécessairement convergente, quelle que soit la fonction arbitraire $\varphi(x)$, c'est-à-dire que la somme des termes, à mesure que l'on en prend un plus grand nombre, approche toujours d'une limite déterminée, qui est la valeur du premier membre, pourvu que l'on ne donne à la variable x que des valeurs comprises entre 0 et a (*). Au delà de cet intervalle, le second membre de l'équation affecte des valeurs périodiques, qui ne s'accordent plus en général avec celles que pourrait donner la fonction arbitraire $\varphi(x)$.

Il ne sera pas inutile de remarquer qu'il ne peut être permis d'omettre dans le second membre de l'équation (A), un seul des termes appartenant à la série des sinus des arcs égaux à la demi-circonférence multipliée par un nombre entier quelconque; car cette omission ôterait à l'intégrale cherchée la généralité nécessaire, l'intégrale devant toujours comprendre, sans aucune exception, toutes les expressions analytiques qui satisfont à l'équation différentielle et aux conditions particulières de la question. C'est ce qui devient manifeste en remarquant que si l'on omettait, par exemple, le terme $A_3 \sin. \frac{3\pi x}{a}$, on trouverait alors en multipliant les deux membres de l'équation (A) par $dx.\sin. \frac{3\pi x}{a}$, et intégrant ensuite depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, le résultat $\int_0^a dx.\sin.\frac{3\pi x}{a}.\ \varphi(x)=0$, résultat qui ne peut évidemment subsister en général, mais seulement pour certaines formes particulières de la fonction $\varphi(x)$.

(*) Voyez sur ce point un Mémoire de M. Lejeune Dirichlet, inséré au tome IV du *Journal* de M. Crelle.

492. D'après ce qui précède, la température variable v des différents points de la barre se trouvera donc exprimée par la formule

$$v=\frac{2}{a}.e^{-\frac{h\gamma}{\Omega}t}\sum_{i=1}^{i=\infty}\sin.\frac{i\pi x}{a}.e^{-\frac{K}{CD}\frac{i^2\pi^2}{a^2}t}\int_0^a d\alpha\sin.\frac{i\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha),$$

qui résout entièrement la question proposée. Elle indique la manière dont la chaleur se propage et se répartit dans la barre. Les termes successifs de la série sont affectés des facteurs $e^{-\frac{K}{CD}\frac{\pi^2}{a^2}t}$, $e^{-\frac{K}{CD}\frac{2^2}{a^2}t}$, $e^{-\frac{K}{CD}\frac{3^2\pi^2}{a^2}}$, etc., qui se réduisent tous à l'unité quand $t=0$, mais qui, lorsque t augmente, prennent des valeurs très-inégales, décroissant d'autant plus rapidement à partir du premier terme que le temps t est plus grand. Il en résulte qu'à mesure que le temps s'écoule, les derniers termes de la série disparaissent successivement, et que bientôt elle peut être réduite à ses deux premiers termes, ou même à son premier terme seul; en sorte que l'on a simplement

$$v=\frac{2}{a}.e^{-\left(\frac{h\gamma}{\Omega}+\frac{K}{CD}\frac{\pi^2}{a^2}\right)t}.\sin.\frac{\pi x}{a}\int_0^a d\alpha.\sin.\frac{\pi\alpha}{a}.\varphi(\alpha).$$

Ainsi quelque arbitraire et irrégulier que puisse être l'état initial de la température, elle tend rapidement à se rapprocher de la distribution indiquée par cette expression, c'est-à-dire d'un état tel que les températures des divers points sont proportionnels aux sinus des arcs compris dans la demi-circonférence. Ces rapports une fois établis ne s'altèrent pas. Les températures de tous les points s'abaissent à la fois en conservant les mêmes proportions, et ce n'est à la rigueur

qu'après un temps infini que tout l'excès de la chaleur qui avait été donné à la barre étant dissipé, chacun des points est amené à la température zéro du milieu dans laquelle elle est placée.

493. On reconnaît d'ailleurs que la solution précédente, par cela seul qu'elle représente l'état initial et satisfait à l'équation différentielle, est la seule qui puisse être obtenue, et que toute autre solution ne pourrait en différer. En effet, lorsque le premier état $v_0 = \varphi(x)$ des températures est donné, l'équation différentielle faisant connaître la valeur du coefficient $\frac{dv}{dt}$, détermine la température $v_0 + \frac{dv_0}{dt}\Delta t = v_1$ qui a lieu après le temps Δt pour un point quelconque, avec une exactitude d'autant plus grande que Δt est plus petit. Elle déterminera également les températures $v_2 = v_1 + \frac{dv_1}{dt}\Delta t$, $v_3 = v_2 + \frac{dv_2}{dt}\Delta t$, etc., qui auront lieu après les temps $2\Delta t$, $3\Delta t$, etc. Or, l'expression précédente donnant $v = v_0$ lorsque $t = 0$, et satisfaisant à l'équation différentielle, donnera évidemment en y supposant $t = \Delta t, = 2\Delta t, = 3\Delta t$, etc., les mêmes valeurs v_1, v_2, v_3, etc. (l'intervalle Δt étant supposé, comme on doit le faire, infiniment petit). Ainsi la solution est unique, et nécessairement exprimée par la formule précédente.

494. Nous considérerons maintenant la question du mouvement de vibration d'une corde tendue entre deux points fixes. On suppose que cette corde ait été dérangée d'une manière quelconque de sa figure naturelle rectiligne, et que l'on ait imprimé des vitesses quelconques à tous ses points : il s'agit de déterminer les mouvements qu'ils affecteront. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que ces mouve-

ments s'opèrent dans un plan, et de plus, que les écarts de chaque point à partir de la ligne droite tracée d'une extrémité fixe à l'autre, sont très-petits, en sorte que l'on peut négliger les puissances supérieures des nombres qui les représentent. On désignera par

x l'abscisse d'un point quelconque de la courbe affectée par la corde, à la fin du temps t;

y l'ordonnée du même point;

a la longueur de la corde entre ces deux extrémités fixes;

p le poids de la corde pour l'unité de longueur;

P un poids égal à la force avec laquelle la corde a été tendue;

g la vitesse imprimée aux corps pesants par la gravité dans l'unité de temps.

Le mouvement de chaque élément de la longueur de la corde, dont le poids peut être exprimé par pdx, et la masse par $\frac{p}{g}dx$, peut être déterminé en considérant cet élément comme un point matériel libre, pourvu que l'on ait égard aux forces qui le sollicitent par l'effet de sa liaison avec les autres parties de la corde. Or, si l'on veut déterminer le mouvement de l'élément dans le sens des y, on considérera qu'à la fin du temps t, cet élément est sollicité à sa première extrémité, en vertu de cette liaison, parallèlement aux y, par la composante $P\frac{dy}{dx}$ de la tension P de la corde, qui tend à le rapprocher de l'axe des x; et à sa seconde extrémité par cette même composante augmentée de sa différentielle, savoir,

$$P\left(\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}dx\right),$$

qui tend à l'éloigner du même axe. Donc l'élément est sollicité dans le sens de l'ordonnée y par la différence de ces deux forces, qui est $P\frac{d^2y}{dx^2}dx$, et par conséquent la loi de son mouvement est exprimée par l'équation

$$\frac{pdx}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = P\frac{d^2y}{dx^2}dx, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{gP}{p}\frac{d^2y}{dx^2},$$

qui doit subsister pour tous les points de la corde.

495. En cherchant, conformément au n° 487, à satisfaire à cette équation par la valeur particulière $y = e^{mx+nt}$, on reconnaît que les quantités m et n sont assujetties à la condition

$$n^2 = k^2m^2, \qquad \text{d'où} \qquad n = \pm km,$$

en écrivant pour abréger k au lieu de $\sqrt{\frac{gP}{p}}$. On peut donc prendre $y = e^{m(x+kt)}$ et $y = e^{m(x-kt)}$, la valeur de m demeurant arbitraire. D'où l'on conclut que l'intégrale générale de l'équation précédente est exprimée par

$$y = Ae^{m(x+kt)} + A_1e^{m_1(x+kt)} + A_2e^{m_2(x+kt)} + \text{etc.}$$
$$+ Be^{n(x-kt)} + B_1e^{n_1(x-kt)} + B_2e^{n_2(x-kt)} + \text{etc.}$$

les constantes m, m_1, m_2, etc., n, n_1, n_2, etc., étant entièrement arbitraires, aussi bien que A, A_1, A_2, etc., B, B_1, B_2, etc.

Afin que ces constantes soient déterminées maintenant d'une manière conforme aux conditions de la question proposée, il faut en premier lieu que la valeur de y soit nulle aux deux extrémités fixes de la corde, c'est-à-dire lorsque $x = 0$ et $x = a$, ce qui exige que l'on attribue des valeurs

imaginaires aux constantes m, m_1, m_2, etc., et n, n_1, n_2, etc., ou que l'on remplace $e^{m(x+kt)}$ par

$$\cos.m(x+kt)+\sqrt{-1}\sin.m(x+kt)=\cos.mx.\cos.mkt$$
$$-\sin.mx.\sin.mkt$$
$$+\sqrt{-1}(\sin.mx\cos.mkt+\cos.mx\sin.mkt),$$

et de même $e^{n(x-kt)}$ par

$$\cos.nx.\cos.nkt+\sin.nx.\sin.nkt+\sqrt{-1}(\sin.nx\cos.nkt)$$
$$-\cos.nx\sin.nkt),$$

et ainsi des autres termes. De plus, il faudra supprimer les termes contenant $\cos.mx$ ou $\cos.nx$, puisqu'ils ne deviennent point nuls quand $x=0$; et quant aux termes contenant $\sin.mx$ ou $\sin.nx$, on devra prendre pour les constantes m ou n un nombre entier de demi-circonférences divisé par a, afin que ces termes s'évanouissent lorsque $x=a$. Nous aurons donc pour l'intégrale cherchée, en donnant des coefficients différents aux termes qui satisfont séparément à l'équation différentielle,

$$y=A_1\sin.\frac{\pi x}{a}\cos.\frac{\pi kt}{a}+A_2\sin.\frac{2\pi x}{a}\cos.\frac{2\pi kt}{a}+A_3\sin.\frac{3\pi x}{a}\cos.\frac{3\pi kt}{a}+\text{etc.}$$
$$+B_1\sin.\frac{\pi x}{a}\sin.\frac{\pi kt}{a}+B_2\sin.\frac{2\pi x}{a}\sin.\frac{2\pi kt}{a}+B_3\sin.\frac{3\pi x}{a}\sin.\frac{3\pi kt}{a}+\text{etc.}$$

et il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients A_1, A_2, A_3, etc., et B_1, B_2, B_3, etc., d'après la considération de l'état initial.

496. Supposons donc qu'à l'instant d'où l'on commence à compter le temps : 1° la figure de la corde soit exprimée par l'équation $y=\varphi(x)$; 2° la vitesse de l'un quelconque de

ses points soit exprimée par l'équation $\frac{dy}{dt} = \psi(x)$, φ et ψ désignant des fonctions entièrement arbitraires. Pour que l'expression précédente s'accorde avec ces conditions, on devra donc avoir

$$\varphi(x) = A_1 \sin. \frac{\pi x}{a} + A_2 \sin. \frac{2\pi x}{a} + A_3 \sin. \frac{3\pi x}{a} + \text{etc.},$$

$$\psi(x) = B_1 \frac{\pi k}{a} \sin. \frac{\pi x}{a} + B_2 \frac{2\pi k}{a} \sin. \frac{2\pi x}{a} + B_3 \frac{3\pi k}{a} \sin. \frac{3\pi x}{a} + \text{etc.},$$

équations d'après lesquelles les coefficients dont il s'agit se détermineront conformément à ce qu'on a vu dans le n° 491. L'expression complète de l'ordonnée y sera en conséquence

$$y = \left[\frac{2}{a} \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty} \sin. \frac{i\pi x}{a} . \cos. \frac{i\pi k t}{a} \int_0^a d\alpha . \sin. \frac{i\pi \alpha}{a} . \varphi(\alpha) \right.$$
$$\left. + \frac{2}{k\pi} \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} \sin. \frac{i\pi x}{a} . \sin. \frac{i\pi k t}{a} \int_0^a d\alpha . \sin. \frac{i\pi \alpha}{a} . \psi(\alpha) \right].$$

Cette expression montre que, quel que soit l'état initial, le mouvement de la corde peut être regardé comme la réunion ou la superposition d'une infinité de mouvements simples oscillatoires, exprimés chacun par un terme des séries. Les durées des oscillations dans ces divers mouvements simples décroissent comme les nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc. L'état initial se reproduit alternativement d'un côté et de l'autre de la direction naturelle de la corde. La durée d'une oscillation entière est $a\sqrt{\frac{p}{gP}}$, en sorte qu'elle est propor-

tionnelle à la longueur de la corde entre ses extrémités fixes et à la racine quarrée du rapport du poids de l'unité de longueur de la corde au poids qui en mesure la tension. Ces résultats sont entièrement conformes à l'expérience.

Des notions analogues à celles qui ont été présentées dans le n° 493, prouveront d'ailleurs que la solution est unique, et nécessairement donnée par l'expression précédente, qui s'accorde avec l'état initial et vérifie l'équation différentielle.

XXXIX. MÉTHODE DES VARIATIONS.

497. La méthode des variations a pris naissance dans les questions de maximum et de minimum considérées sous le point de vue le plus étendu; mais son utilité principale consiste dans les applications à la mécanique. Nous ne pouvons présenter ici que les premiers éléments de cette méthode et ses usages les plus simples.

Il faut distinguer en premier lieu en quoi les questions de maximum ou de minimum qui dépendent du calcul des variations diffèrent des questions ordinaires du même genre. Dans les questions ordinaires, une quantité U est donnée en fonction d'une ou de plusieurs variables indépendantes x, y, z, etc., de manière que chaque système de valeurs attribuées à ces variables amène une valeur déterminée pour U. On demande de fixer les valeurs de x, y, z, etc., qui rendront U la plus grande ou la plus petite qu'il soit possible. Cette question, comme on l'a vu dans l'article XIV, se résout en posant les équations

$$\frac{dU}{dx}=0, \qquad \frac{dU}{dy}=0, \qquad \frac{dU}{dz}=0, \quad \text{etc.},$$

auxquelles doivent satisfaire les valeurs demandées des variables x, y, z, etc. Quant à la distinction des cas où les valeurs qui satisfont à ces équations répondent effectivement à un maximum ou à un minimum, elle est fondée, comme on l'a vu également dans l'article cité, sur la considération des coefficients différentiels du second ordre de la fonction U.

Dans les questions qui dépendent du calcul des variations, on conçoit entre diverses quantités variables une relation existante, mais indéterminée, et l'on demande de déterminer cette relation de manière que la valeur d'une certaine fonction, valeur qui dépend de la relation dont il s'agit, soit la plus grande possible.

Par exemple une courbe étant tracée entre deux points fixes, la grandeur de l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, et les ordonnées des points extrêmes, est déterminée, et sa valeur résulte de la relation $y = f(x)$ qui est l'équation de la courbe. Représentons-nous entre les deux points fixes plusieurs courbes qui auraient toutes des longueurs égales : l'équation $y = f(x)$ sera différente pour chacune, et l'aire, représentée par $\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, y$, aura également des valeurs différentes. La longueur de la courbe est exprimée d'ailleurs par

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

On peut demander, cette longueur demeurant la même, de déterminer la figure de la courbe, c'est-à-dire la forme de la fonction $f(x)$, de manière que l'aire $\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, y$ soit la plus grande ou la moindre possible.

Concevons encore une courbe tracée entre deux points fixes, et considérons un corps qui descend le long de cette courbe en cédant librement à l'action de la gravité. Le temps que ce corps emploiera à parvenir d'un point à l'autre dépend de la figure de la courbe dont il s'agit, et sa valeur est exprimée, en supposant l'axe des x vertical, par

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{2g(x-x_0)}}.$$

On peut demander de déterminer la relation $y=f(x)$ qui donne la figure de la courbe de manière que ce temps soit le moindre possible. Cette question sera plus étendue si l'on admet que la *courbe de la plus vite descente*, ou *brachystochrône*, doit être tracée, non pas entre deux points fixes, mais entre deux lignes courbes données, ou entre deux surfaces courbes données. Les limites x_0 et x_ω de l'intégrale deviennent alors variables, aussi bien que l'abscisse x_0 du premier point de la courbe qui se trouve sous le signe d'intégration définie.

Une recherche de même genre est celle de la ligne la plus courte qui puisse être tracée sur une surface donnée, entre deux points fixes, ou entre deux lignes marquées sur cette surface.

498. Ces exemples suffisent pour indiquer quelle est la nature des questions dont il s'agit, et à quelles recherches analytiques on se trouve conduit pour en trouver la solution. L'expression de la quantité qu'il faut rendre un maximum ou un minimum se forme, d'après les règles connues, au moyen des éléments différentiels de la courbe cherchée. Cette expression est toujours une intégrale définie prise

entre des limites données, fixes ou variables avec certaines conditions. On doit rendre la valeur de cette intégrale la plus grande ou la moindre possible, en déterminant en conséquence la relation analytique dont dépendent les coefficients différentiels qui se trouvent sous le signe d'intégration. Cette question se résout d'ailleurs au moyen des principes qui s'appliquent aux questions ordinaires de maximum et de minimum. On suppose que toutes les quantités variables dont dépend la valeur de la fonction proposée augmentent de quantités arbitraires qui peuvent être supposées aussi petites qu'on le veut; et dans le développement de la valeur qui en résulte pour cette fonction, on égale à zéro le terme qui contient les premières puissances de ces accroissements; ou, si l'on veut, on égale à zéro la différentielle totale de la fonction proposée prise par rapport à toutes les quantités variables qu'elle contient. L'équation qui en résulte doit subsister pour toutes les valeurs qui peuvent être attribuées aux accroissements infiniment petits de ces quantités variables. Elle exprime la condition nécessaire du maximum ou minimum. Quant à la distinction des cas où il y a maximum ou minimum, et de ceux où, bien que cette condition soit satisfaite, le maximum ou minimum n'existe pas, elle dépend de la considération du terme qui contient les secondes puissances des accroissements. Le maximum et le minimum ont lieu respectivement lorsque ce terme est toujours négatif ou toujours positif, quelles que soient les valeurs des accroissements.

499. Nous considérerons en premier lieu le cas où l'on n'a qu'une variable indépendante x, et une fonction y dont la valeur dépend de celle de x; y représentera donc l'ordonnée d'une courbe dont x est l'abscisse. Il s'agit de déterminer la figure de la courbe de manière que l'intégrale

définie

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, V$$

soit un maximum ou un minimum. Les limites x_0 et x_ω de l'intégrale peuvent avoir une valeur constante donnée. Ces limites peuvent aussi, dans quelques cas, varier d'après certaines conditions. V est une fonction quelconque d'un nombre déterminé des quantités x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc.; x étant la variable indépendante, l'élément dx est supposé constant.

Cela posé, nous admettrons d'abord que les limites x_0, x_ω ont une valeur constante. Dans ce cas, les points extrêmes de la portion de courbe que l'on considère doivent se trouver toujours sur les perpendiculaires à l'axe des abscisses, menées aux distances x_0, x_ω de l'origine; et l'on fera varier d'une manière aussi générale qu'il soit possible la fonction proposée $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.V$, si l'on suppose que la courbe cherchée se change dans une courbe quelconque infiniment voisine qui soit assujettie à cette condition. Or il n'est pas nécessaire, pour opérer un tel changement, de faire varier x dans la fonction V; il suffit d'attribuer, dans cette fonction, à la quantité y et par suite à ses dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., des variations que nous désignerons par δy, $\delta\frac{dy}{dx}$, $\delta\frac{d^2y}{dx^2}$, $\delta\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., et qui pourront être différentes d'une abscisse à une autre, en sorte que δy est une quantité infiniment petite, mais d'ailleurs fonction quelconque de x. La caractéristique δ représente, aussi bien que la caractéristique d, un accroissement infi-

niment petit attribué à la quantité variable affectée de cette caractéristique; mais il y a ici cette différence que le signe d indique un accroissement résultant du passage d'un point de la courbe cherchée au point suivant de la même courbe, tandis que le signe δ indique un accroissement résultant de ce qu'on passe d'un point de la courbe cherchée au point correspondant de la courbe quelconque infiniment voisine. De plus nous appellerons *variations* les accroissements désignés par δ, le nom de *différentielles* étant conservé aux accroissements indiqués par d. La variation de la fonction V résultant des variations attribuées aux quantités $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., qui y sont contenues, sera exprimée par δV; et l'on aura

$$\delta V = N\delta y + P\delta\frac{dy}{dx} + Q\delta\frac{d^2y}{dx^2} + R\delta\frac{d^3y}{dx^2} + \text{etc.},$$

si l'on représente par N, P, Q, R, etc., les coefficients différentiels de la fonction V pris respectivement par rapport aux quantités variables $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^2}$, etc.

La condition du maximum ou minimum exige que la variation

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \delta V$$

de l'intégrale définie proposée soit nulle. Cette condition est donc exprimée par l'équation

$$0 = \int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(N\delta y + P\delta\frac{dy}{dx} + Q\delta\frac{d^2y}{dx^2} + R\delta\frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.}\right)$$

500. On remarquera maintenant que dans les termes $\frac{\delta dy}{dx}$,

$\frac{\delta d^2y}{dx^2}$, $\frac{\delta d^3y}{dx^3}$, etc., l'ordre des signes d et δ peut être interverti à volonté. En effet, l'ordonnée du point de la courbe cherchée étant y, l'ordonnée du point suivant de la même courbe est $y + dy$, et celle du point correspondant de la courbe voisine est $y + \delta y$. Donc l'ordonnée du point suivant de cette dernière courbe est également $y + dy + \delta(y + dy)$, ou $y + \delta y + d(y + \delta y)$. Donc $\delta dy = d\delta y$. La même remarque peut être appliquée à la fonction $\frac{d^2y}{dx^2}$ et aux fonctions suivantes. On a également $\frac{\delta d^2y}{dx^2} = \frac{d\delta dy}{dx^2} = \frac{d^2\delta y}{dx^2}$, et ainsi de suite. Nous pouvons donc écrire, au lieu de l'équation précédente,

$$0 = \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$

Or, si l'on considère à part chacun des termes du second membre, on voit qu'au moyen de l'intégration par parties ils peuvent être transformés de la manière suivante. On aura

$$\int dx \,.\, P\frac{d\delta y}{dx} = const. + P\delta y - \int dx \,.\, \frac{dP}{dx}\delta y \,;$$

puis en donnant successivement aux quantités qui entrent dans cette équation les valeurs qui répondent aux limites x_0 et x_ω de l'intégrale,

$$0 = const. + P_0\delta y_0 \,,$$

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, P\frac{d\delta y}{dx} = const. + P_\omega dy_\omega - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \frac{dP}{dx}\delta y \,;$$

et en retranchant le premier résultat du second,

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mathrm{P} \frac{d\delta y}{dx} = \left[\begin{array}{l} -\mathrm{P}_0 \delta y_0 - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \frac{d\mathrm{P}}{dx} \delta y \\ + \mathrm{P}_\omega \delta y_\omega \end{array} \right].$$

On trouvera de même pour le terme suivant,

$$\int dx \,.\, \mathrm{Q} \frac{d^2\delta y}{dx^2} = const. + \mathrm{Q}\delta \frac{dy}{dx} - \int dx \,.\, \frac{d\mathrm{Q}}{dx} \frac{d\delta y}{dx}$$
$$= const. + \mathrm{Q}\delta \frac{dy}{dx} - \frac{d\mathrm{Q}}{dx} \delta y + \int dx \,.\, \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2} \delta y;$$

et par conséquent

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mathrm{Q} \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \left[\begin{array}{l} -\mathrm{Q}_0 \delta \frac{dy_0}{dx} + \frac{d\mathrm{Q}_0}{dx} \delta y_0 + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2} \delta y \\ + \mathrm{Q}_\omega \delta \frac{dy_\omega}{dx} - \frac{d\mathrm{Q}_\omega}{dx} \delta y_\omega \end{array} \right].$$

Le terme qui viendra après donnera

$$\int dx \,.\, \mathrm{R} \frac{d^3\delta y}{dx^3} = const. + \mathrm{R}\delta \frac{d^2y}{dx^2} - \int dx \,.\, \frac{d\mathrm{R}}{dx} \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$
$$= const. + \mathrm{R}\delta \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d\mathrm{R}}{dx} \delta \frac{dy}{dx} + \frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2} \delta y - \int dx \,.\, \frac{d^3\mathrm{R}}{dx^3} \delta y;$$

et par conséquent

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mathrm{R} \frac{d^3\delta y}{dx^3} =$$
$$\left[\begin{array}{l} -\mathrm{R}_0 \delta \frac{d^2y_0}{dx_0} + \frac{d\mathrm{R}_0}{dx} \delta \frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2\mathrm{R}_0}{dx^2} \delta y_0 - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \frac{d^3\mathrm{R}}{dx^3} \delta y \\ + \mathrm{R}_\omega \delta \frac{d^2y_\omega}{dx^2} - \frac{d\mathrm{R}_\omega}{dx} \delta \frac{dy_\omega}{dx} + \frac{d^2\mathrm{R}_\omega}{dx^2} \delta y_\omega \end{array} \right].$$

Et ainsi de suite pour les autres termes.

D'après ces transformations, l'équation précédente expri-

mant la condition du maximum ou du minimum, se trouve changée en

$$\left[\begin{array}{l} -\left(P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \text{etc.}\right)\delta y_0 - \left(Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dy_0}{dx} \\ \qquad\qquad -(R - \text{etc.})\,\delta\frac{d^2y^0}{dx^2} - \text{etc.} \\ +\left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} - \text{etc.}\right)\delta y_\omega + \left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dy_\omega}{dx} \\ \qquad\qquad +(R_\omega - \text{etc.})\,\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2} + \text{etc.} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}\right)\delta y \\ \qquad\qquad = 0. \end{array}\right]$$

Cette équation doit subsister, pour que la condition du maximum ou du minimum de l'intégrale définie proposée soit satisfaite, quelles que soient les variations marquées par le signe δ. Les deux premières lignes contiennent les variations des quantités y_0, $\frac{dy_0}{dx}$, $\frac{d^2y_0}{dx^2}$, etc., ou y_ω, $\frac{dy_\omega}{dx}$, $\frac{d^2y_\omega}{dx^2}$, etc., qui représentent les valeurs que prennent les fonctions y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., lorsqu'on attribue à l'abscisse x les valeurs x_0 ou x_ω qui répondent aux limites de l'intégrale définie proposée. La dernière ligne contient sous le signe d'intégration la variation δy de l'une quelconque des coordonnées de la courbe, variation qui est entièrement arbitraire. Cette dernière ligne doit être égalée séparément à zéro; et il en est de même des deux autres.

501. Nous aurons donc en premier lieu *l'équation indéfinie*

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.},$$

qui appartient à tous les points de la courbe, et qui doit d'abord être vérifiée par l'expression de y en x qui résoudra la question. Cette équation sera une équation différentielle entre les variables x et y, dont il s'agira de trouver l'intégrale générale.

Nous aurons ensuite, si les variations relatives à la première limite de l'intégrale sont indépendantes des variations relatives à la seconde limite, les *équations déterminées*

$$0 = \left(P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \text{etc.}\right)\delta y_0 + \left(Q_0 - \frac{dR_0}{dx^2} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dy_0}{dx}$$
$$+ (R_0 - \text{etc.})\delta\frac{d^2y_0}{dx} - \text{etc.},$$
$$0 = \left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta y_\omega + \left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta\frac{dy_\omega}{dx}$$
$$+ (R_\omega - \text{etc.})\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2} + \text{etc.},$$

qui appartiennent aux deux limites de l'intégrale, et qui doivent également être satisfaites par l'expression de y en x qui résout la question, lorsqu'on donne à x les valeurs extrêmes x_0, x_ω.

Si les points extrêmes étaient donnés de position, ou si les valeurs des ordonnées y_0 et y_ω étaient constantes aussi bien que x_0 et x_ω, on aurait alors $\delta y_0 = 0$, $\delta y_\omega = 0$, et les premiers termes des équations dont il s'agit disparaîtraient. Il suffirait donc, pour y satisfaire, d'égaler séparément à zéro les termes suivants. De même si les valeurs de quelques-uns des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., appartenant à l'un ou à l'autre des points extrêmes, étaient don-

nées par la nature de la question, on aurait $\delta \frac{dy_0}{dx} = 0$, $\delta \frac{d^2y_0}{dx^2} = 0$, etc., pour l'un de ces points; ou $\delta \frac{dy_\omega}{dx} = 0$, $\delta \frac{d^2y_\omega}{dx^2} = 0$, etc., pour l'autre; et les termes affectés de ces variations disparaîtraient d'eux-mêmes. Quant aux termes qui ne disparaissent point ainsi d'eux-mêmes par suite des valeurs déterminées que doivent conserver l'ordonnée y ou quelques-uns de ses coefficients différentiels dans les points extrêmes de la courbe, on doit les égaler séparément à zéro. Les équations qu'on obtient de cette manière servent en général à déterminer les constantes arbitraires introduites par l'intégration de l'équation indéfinie qui précède.

502. Avant d'aller plus loin, on remarquera qu'en égalant à zéro le terme qui reste affecté du signe d'intégration dans l'expression de $\int dx . \delta V$, et en regardant l'équation ainsi formée, non plus comme devant déterminer y, mais comme devant être identique, on exprime la condition nécessaire pour que l'intégration indiquée puisse s'effectuer, ou pour que la fonction $dx . \delta V$ soit une différentielle exacte; ce qui résulterait de ce que la fonction Vdx serait elle-même une différentielle exacte. Car la supposition $Vdx = dU$ entraîne $\delta Vdx = \delta dU = d\delta U$. D'ailleurs, mettant y', y'', y''', etc., à la place de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., l'équation de condition

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

dont il s'agit, peut s'écrire

$$0 = \frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dy''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dy'''}\right) + \text{etc.}$$

Si elle est satisfaite identiquement, la fonction Vdx, dans laquelle V contient x, y, y', y'', etc., sera une différentielle exacte d'une fonction de l'ordre immédiatement inférieur.

Nous pouvons vérifier cette proposition pour les fonctions du premier ordre. L'équation de condition se réduit alors à

$$0 = \frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right).$$

Comme elle doit être identique, les deux termes doivent être du même ordre. Donc, puisque $\frac{dV}{dy}$ ne peut contenir que y', il s'ensuit que $\frac{dV}{dy'}$ ne doit pas contenir y', puisqu'autrement $\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right)$ contiendrait y''; d'où l'on conclut en premier lieu que la fonction différentielle du premier ordre dont il s'agit, qui doit être une différentielle exacte, ne peut être que de la forme

$$(A + By')dx, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad Adx + Bdy,$$

A et B étant des fonctions de x et de y seulement. Cette fonction donnera

$$\frac{dV}{dy} = \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dy}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dV}{dy'} = B;$$

et en substituant dans l'équation de condition, il viendra

$$0 = \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dy}\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx},$$

conformément à ce qu'on a vu dans le n° 365.

503. Nous avons supposé dans le n° 499, afin de considérer d'abord le cas plus simple, que dans l'intégrale définie proposée

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mathrm{V},$$

qu'il s'agit de rendre un maximum ou un minimum, les limites x_0, x_ω étaient constantes, en sorte que dans tous les changements que l'on pouvait faire subir à la courbe qui représente la relation de y à x, les points extrêmes devaient demeurer constamment sur les mêmes parallèles à l'axe des y. Nous supposerons maintenant ces limites variables. Dans ce cas, nous ferons varier la fonction $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\mathrm{V}$ de la manière la plus générale qu'il soit possible, en admettant que toutes les abscisses x augmentent de la quantité arbitraire δx, en même temps que l'ordonnée y et ses dérivées augmenteront comme ci-dessus, des quantités δy, $\delta \frac{dy}{dx}$, $\delta \frac{d^2y}{dx^2}$, etc. La courbe qui exprime la relation de y à x se changera alors en une courbe infiniment voisine. La variation qui en résultera dans l'intégrale $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\mathrm{V}$ sera exprimée par

$$-\mathrm{V}_0\delta x_0 + \mathrm{V}_\omega \delta x_\omega + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \delta \mathrm{V}.$$

Mais il faut remarquer ici que, par l'effet de la variation supposée de l'abscisse x, un point quelconque de la première courbe étant transporté dans la courbe variée, son ordonnée devient $y + \delta y$. Donc, l'ordonnée qui répond à l'abscisse x dans la courbe variée, a pour expres-

sion $y+\delta y-\left(\frac{dy}{dx}+\delta\frac{dy}{dx}\right)\delta x$, ou $y+\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x$, en négligeant les quantités du second ordre. On conclut de là qu'en formant δV dans l'expression précédente, nous devons regarder y comme augmentant, non pas de δy, mais de $\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x$. La même remarque s'appliquera aux fonctions dérivées de y. On doit regarder $\frac{dy}{dx}$ comme ayant varié seulement de $\delta\frac{dy}{dx}-\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\delta x$, ou $\delta\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}\delta x$. On considérera également $\frac{d^2y}{dx^2}$ comme ayant varié seulement de $\delta\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^3y}{dx^3}\delta x$, et ainsi des autres. Par conséquent, si nous représentons comme dans le n° 499, par N, P, Q, etc., les coefficients différentiels partiels de la fonction V pris respectivement par rapport à y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., nous devrons écrire ici

$$\delta V=N\left(\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x\right)+P\left(\delta\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}\delta x\right)+Q\left(\delta\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^3y}{dx^3}\delta x\right)+\text{etc.}$$

On remarquera de plus qu'en posant

$$\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x=\delta u,$$

et différentiant cette équation, il vient

$$\frac{d\delta y}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}\delta x-\frac{dy}{dx}\frac{d\delta x}{dx}=\frac{d\delta u}{dx};$$

puis en ajoutant l'équation identique

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{\delta dy}{dx} - \frac{dy}{dx} \frac{\delta dx}{dx},$$

on trouve (puisque l'ordre des signes d et δ peut être changé à volonté),

$$\delta \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2} \delta x = \frac{d\delta u}{dx}.$$

Différentiant de même cette dernière équation, ce qui donne

$$\frac{d\delta \frac{dy}{dx}}{dx} - \frac{d^3y}{dx^3} \delta x - \frac{d^2y}{dx^2} \frac{d\delta x}{dx} = \frac{d^2\delta u}{dx^2}:$$

puis ajoutant l'équation identique

$$\delta \frac{d^2y}{dx^2} = \delta \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{\delta d \frac{dy}{dx}}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2} \frac{\delta dx}{dx},$$

on trouve également

$$\delta \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3} \delta x = \frac{d^2\delta u}{dx^2}.$$

On obtiendra de la même manière

$$\delta \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3y}{dx^3} \delta x = \frac{d^3\delta u}{dx^3};$$

et ainsi de suite. Il en résulte que l'expression précédente de δV peut s'écrire

$$\delta V = N\delta u + P\frac{d\delta u}{dx} + Q\frac{d^2\delta u}{dx} + R\frac{d^3\delta u}{dx^3} + \text{etc.}$$

L'équation exprimant la condition du maximum ou du minimum sera donc

$$0 = \left[\begin{array}{l} -V_0\delta x_0 + V_\omega\delta x_\omega \\ + \int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(N\delta u + P\frac{d\delta u}{dx} + Q\frac{d^2\delta u}{dx^2} + R\frac{d^3\delta u}{dx^3} + \text{etc.}\right) \end{array}\right];$$

et en opérant sur le second terme les transformations indiquées n° 500, cette équation se changera en

$$\left[\begin{array}{l} -V_0\delta x_0 - \left(P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \frac{d^2R_0}{dx^2} - \text{etc.}\right)\left(\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right) \\ -\left(Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \text{etc.}\right)\left(\delta\frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0\right) - \text{etc.} \\ +V_\omega dx_\omega + \left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \frac{d^2P_\omega}{dx^2} - \text{etc.}\right)\left(\delta y_\omega - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) \\ +\left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\left(\delta\frac{dy_\omega}{dx} - \frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\omega\right) + \text{etc.} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left[N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}\right]\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) \\ \qquad = 0. \end{array}\right]$$

En comparant ce résultat à celui du n° 500, on voit en premier lieu que l'on est conduit ici à la même équation indéfinie

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

qui doit subsister pour tous les points de la courbe. Quant aux équations déterminées, elles diffèrent de celles qui sont écrites n° 501, par l'introduction des termes $-V_0\delta x_0$

et $V_\omega \delta x_\omega$; et parce que les quantités δy_0 et δy_ω sont remplacées par $\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0$ et $\delta y_\omega - \frac{dy}{dx}\delta x_\omega$; les quantités $\delta \frac{dy_0}{dx}$ et $\delta \frac{dy_\omega}{dx}$ par $\delta \frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0$ et $\delta \frac{dy_\omega}{dx} - \frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\omega$; et ainsi de suite. Si les variations δx_0, δy_0, $\delta \frac{dy_0}{dx}$, etc., et δx_ω, δy_ω, $\delta \frac{dy_\omega}{dx}$; etc., sont arbitraires, le coefficient de chacune de ces variations doit être égalé séparément à zéro, ce qui donnera autant d'équations distinctes auxquelles l'expression cherchée de y en x doit satisfaire quand on donne à x les valeurs extrêmes x_0 et x_ω. Si quelques-unes des quantités $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc., ont des valeurs déterminées pour l'un ou l'autre des points extrêmes de la courbe, les termes affectés des variations de ces quantités disparaissent d'eux-mêmes, et on doit égaler seulement à zéro les termes affectés des autres variations. Il faut remarquer d'ailleurs que si la position des points extrêmes est entièrement arbitraire, chacun de ces points peut être placé où l'on veut sur le plan de la courbe, sans qu'elle cesse pour cela de satisfaire à la condition de maximum ou minimum de l'intégrale définie proposée. Donc on est alors le maître de supposer $\delta x_0 = 0$ et $\delta y_0 = 0$, et, par conséquent, de ne point poser les équations exprimant l'égalité à zéro des coefficients dont ces deux variations sont affectées dans l'équation précédente; en sorte que dans le cas dont il s'agit, l'on a deux équations de moins pour la détermination des constantes.

504. Nous devons remarquer que la fonction désignée par V dans l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, V$$

qu'il s'agit de rendre un maximum ou un minimum, pourrait contenir une ou plusieurs des quantités x_0, y_0, $\frac{dy_0}{dx}$, $\frac{d^2y_0}{dx^2}$, etc., ou x_ω, y_ω, $\frac{dy_\omega}{dx}$, $\frac{d^2y_\omega}{dx^2}$, etc., qui appartiennent aux points extrêmes de la courbe. On en voit un exemple dans la question de la brachystochrône citée n° 497, où la fonction sous le signe d'intégration contient l'abscisse du premier de ces points. On doit dans ce cas, en formant la variation δV, faire varier les quantités dont il s'agit, si leurs valeurs ne sont point constantes en vertu de l'énoncé de la question.

Si, par exemple, V contenait x_0, et que la variation de V, prise par rapport à cette quantité, fût $\mu\delta x_0$, l'expression de δV du n° 503 devrait être augmentée du terme $\mu\delta x_0$. Donc le terme affecté du signe d'intégration dans l'équation qui exprime la condition du maximum ou minimum devrait être augmenté de la quantité $\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mu\delta x_0$, ou $\delta x_0 \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mu$. Il s'ensuit que l'on devrait ajouter cette quantité au second membre de celle des équations déterminées qui se rapporte à la première limite, en sorte que le terme affecté de δx_0 dans cette équation deviendrait

$$\left(-V_0 + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mu\right)\delta x_0.$$

On aurait égard de la même manière à la variation des autres fonctions dont il s'agit, si elles entraient dans la composition de la fonction V.

505. Nous avons considéré jusqu'ici le cas où l'on avait une seule variable indépendante x, et une fonction y dépendante de cette variable, comme cela a lieu dans les problèmes qui se rapportent à une courbe plane. Dans les questions relatives à une courbe à double courbure, il faut considérer une variable indépendante x, et deux fonctions y et z qui dépendent de cette variable. L'intégrale définie qu'il s'agit de rendre un maximum étant toujours

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, V,$$

la fonction V contient alors en général, outre la variable x, les fonctions y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., et z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, etc. Supposons d'abord, comme dans le n° 499, les limites x_0 et x_ω de l'intégrale constantes. La variation de cette intégrale est

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \delta V.$$

Admettons qu'en différentiant la fonction V par rapport aux quantités y, z et à leurs fonctions dérivées, et marquant les différentielles par δ, l'on trouve

$$\delta V = \left[\begin{array}{l} N\delta y + P\delta \frac{dy}{dx} + Q\delta \frac{d^2y}{dx^2} + R\delta \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.} \\ + n\delta z + p\delta \frac{dz}{dx} + q\delta \frac{d^2z}{dx^2} + r\delta \frac{d^3z}{dx^3} + \text{etc.} \end{array}\right];$$

l'équation exprimant la condition du maximum ou minimum de l'intégrale définie proposée sera

$$0=\int_{x_0}^{x_\omega} dx \left[\begin{array}{l} \mathrm{N}\delta y+\mathrm{P}\delta\dfrac{dy}{dx}+\mathrm{Q}\delta\dfrac{d^2y}{dx^2}+\mathrm{R}\delta\dfrac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.} \\ +n\delta z+p\delta\dfrac{dz}{dx}+q\delta\dfrac{d^2z}{dx^2}+r\delta\dfrac{d^3z}{dx^3}+\text{etc.} \end{array}\right].$$

Appliquant donc à cette équation l'analyse exposée n° 500, on verra, comme dans les n° 501 et 503 : 1° que l'on doit avoir pour tous les points de la courbe l'équation indéfinie

$$0=\left[\begin{array}{l} \left(\mathrm{N}-\dfrac{d\mathrm{P}}{dx}+\dfrac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2}-\dfrac{d^3\mathrm{R}}{dx^3}+\text{etc.}\right)\delta y \\ +\left(n-\dfrac{dp}{dx}+\dfrac{d^2q}{dx^2}-\dfrac{d^3r}{dx^3}+\text{etc.}\right)\delta z \end{array}\right]$$

laquelle, si les variations δy et δz sont entièrement indépendantes l'une de l'autre, donne les deux équations distinctes

$$0=\mathrm{N}-\frac{d\mathrm{P}}{dx}+\frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2}-\frac{d^3\mathrm{R}}{dx^3}+\text{etc.}$$

$$0=n-\frac{dp}{dx}+\frac{d^2q}{dx^2}-\frac{d^3r}{dx^3}+\text{etc.};$$

2° que l'on a également pour les points extrêmes de la courbe les équations déterminées suivantes, savoir : pour le premier point

$$\left[\begin{array}{l} \left(\mathrm{P}_0-\dfrac{d\mathrm{Q}_0}{dx}+\dfrac{d^2\mathrm{R}_0}{dx^2}+\text{etc.}\right)\delta y_0+\left(\mathrm{Q}_0-\dfrac{d\mathrm{R}_0}{dx}+\text{etc.}\right)\delta\dfrac{dy_0}{dx} \\ \quad +(\mathrm{R}_0-\text{etc.})\delta\dfrac{d^2y_0}{dx^2}+\text{etc.} \\ \left(p_0-\dfrac{dq_0}{dx}+\dfrac{d^2r_0}{dx^2}-\text{etc.}\right)\delta z_0+\left(q_0-\dfrac{dr_0}{dx}+\text{etc.}\right)\delta\dfrac{dz_0}{dx} \\ \quad +(r_0-\text{etc.})\delta\dfrac{d^2z_0}{dx^2}+\text{etc.} \\ \qquad\qquad =0; \end{array}\right]$$

et pour le second point

$$\left[\begin{array}{l}\left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta y_\omega + \left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta \frac{dy_\omega}{dx} \\ \quad + (R - \text{etc.})\delta \frac{d^2 y_\omega}{dx^2} + \text{etc.} \\ + \left(p_\omega - \frac{dq_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta z_\omega + \left(q_\omega - \frac{dr_\omega}{dx} + \text{etc.}\right)\delta \frac{dz_\omega}{dx} \\ \quad + (r_\omega - \text{etc.})\delta \frac{d^2 z_\omega}{dx^2} + \text{etc.} \\ \qquad = 0.\end{array}\right]$$

On doit appliquer à ces deux équations les remarques faites n° 503, relativement aux conditions qui peuvent être données pour les extrémités de la courbe.

On doit également appliquer au cas dont il s'agit, les remarques faites n° 504, relativement à la nécessité de tenir compte dans l'expression de δV des variations des quantités relatives aux limites, lorsque ces quantités sont variables et entrent dans la composition de la fonction V.

Il est aisé d'étendre cette analyse aux cas où il y aurait un plus grand nombre de fonctions dépendantes de la variable x.

506. Nous pouvons remarquer ici, comme dans le n° 502, que les équations

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

$$0 = n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{etc.},$$

que l'on peut écrire

$$0=\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dy''}\right)-\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dy'''}\right)+\text{etc.}$$

$$0=\frac{dV}{dz}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dz'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dz''}\right)-\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dz'''}\right)+\text{etc.}$$

en mettant y', y'', y''', etc., à la place de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., et z', z'', z''', etc., à la place de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, etc., expriment, en se vérifiant identiquement, les conditions nécessaires pour que la fonction Vdx soit une différentielle exacte.

Dans le cas où cette fonction serait du premier ordre, ces équations se réduisent à

$$0=\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right),\qquad 0=\frac{dz}{dV}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dz'}\right).$$

On en conclurait d'abord, comme dans le numéro cité, que la fonction dont il s'agit doit, pour être une différentielle exacte, être de la forme

$$(A+By'+Cz')dx,\qquad \text{c'est-à-dire}\qquad Adx+Bdy+Cdz,$$

A, B, C désignant des fonctions qui ne contiennent que x, y et z. Cette fonction donnerait donc

$$\frac{dV}{dy}=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dC}{dy}z',\qquad \frac{dV}{dz}=\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}y'+\frac{dC}{dz}z'$$

$$\frac{dV}{dy'}=B,\qquad \frac{dV}{dz'}=C;$$

et en substituant dans les équations de condition, on trouverait

$$0=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dC}{dy}z'-\left(\frac{dB}{dx}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dB}{dz}z'\right),$$
$$0=\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}y'+\frac{dC}{dz}z'-\left(\frac{dC}{dx}+\frac{dC}{dy}y'+\frac{dC}{dz}z'\right);$$

ou

$$0=\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}-\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)z',$$
$$0=\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}+\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)y'.$$

Comme ces équations ne doivent pas déterminer y' et z', puisque y et z sont des fonctions quelconques de x, on en conclut les trois équations distinctes

$$\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}=0,\quad \frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}=0,\quad \frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}=0,$$

conformément à ce qu'on a vu dans le n° 366.

507. Si l'on admet maintenant, comme dans le n° 503, que les limites x_0 et x_ω de l'intégrale définie proposée puissent varier, il sera nécessaire de faire varier l'abscisse x. On reconnaîtra que les variations des coordonnées correspondantes à cette abscisse ne sont plus alors δy et δz, mais $\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x$ et $\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x$. Par conséquent, l'équation indéfinie qui doit subsister pour tous les points de la courbe devient

$$\left[\begin{array}{l}\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{etc.}\right)\left(\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x\right)\\ +\left(n-\frac{dp}{dx}+\frac{d^2q}{dx^2}-\frac{d^3r}{dx^3}+\text{etc.}\right)\left(\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x\right)\end{array}\right]$$
$$=0;$$

et si les variations δx, δy, δz sont entièrement indépen-

dantes les unes des autres, on aura comme ci-dessus les équations distinctes

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

$$0 = n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{etc.}$$

A l'égard des équations déterminées, on verra également que l'on est obligé d'ajouter au second membre de l'équation relative à la première limite, le terme $-V_0\delta x_0$; et de remplacer δy_0 et δz_0 par $\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0$ et $\delta z_0 - \frac{dz_0}{dx}\delta x_0$, $\delta\frac{dy_0}{dx}$ et $\delta\frac{dz_0}{dx}$ par $\delta\frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0$ et $\delta\frac{dz_0}{dx} - \frac{d^2z_0}{dx^2}\delta x_0$, et ainsi de suite. On ajoutera de même à l'équation déterminée relative à la seconde limite, le terme $V_\omega\delta x_\omega$; et l'on remplacera δy_ω et δz_ω par $\delta y - \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega$ et $\delta z - \frac{dz_\omega}{d\omega}\delta x_\omega$, $\delta\frac{dy_\omega}{dx}$ et $\delta\frac{dz_\omega}{dx}$ par $\delta\frac{dy_\omega}{dx} - \frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\omega$ et $\delta\frac{dz_\omega}{dx} - \frac{d^2z_\omega}{dx^2}\delta x_\omega$, et ainsi de suite.

508. Dans les équations qui se rapportent aux surfaces, par exemple dans la recherche de la surface qui, se terminant à un contour donné, aurait la plus petite aire possible, on doit considérer deux variables indépendantes x, y, et une fonction z dépendante de ces variables. Il s'agit alors d'exprimer les conditions du maximum ou minimum d'une intégrale double telle que

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \,.\, V,$$

dans laquelle V peut contenir en général les variables indépendantes x, y, ainsi que la fonction z et ses dérivées $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, etc. Nous considérerons seulement le cas où la projection sur le plan des x, y du contour auquel se termine la surface est un rectangle dont les côtés sont respectivement parallèles aux axes des x et y. Les limites x_0, x_ω désignent les abscisses extrêmes; les limites y_0 et y_ω désignent de même les ordonnées extrêmes. De plus, nous supposerons que ces limites ont des valeurs données et invariables, en sorte que le contour de la portion de surface dont il s'agit ait toujours pour projection les côtés du rectangle. Il ne sera pas nécessaire alors de faire varier les abscisses x et y. La variation de l'intégrale définie proposée sera

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \,.\, \delta V,$$

et si l'on suppose

$$\delta V = L\delta z + M\delta\frac{dz}{dx} + N\delta\frac{dz}{dy} + P\delta\frac{d^2z}{dx^2} + Q\delta\frac{d^2z}{dxdy} + R\delta\frac{d^2z}{dx^2} + \text{etc.},$$

on aura, pour exprimer la condition du maximum ou du minimum de cette intégrale, l'équation

$$0 = \int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \Big[L\delta z + M\delta\frac{dz}{dx} + N\delta\frac{dz}{dy} + P\delta\frac{d^2z}{dx^2} + Q\delta\frac{d^2z}{dxdy} + R\delta\frac{d^2z}{dx^2} + \text{etc.} \Big].$$

509. Appliquant donc les règles du calcul des variations comme on l'a fait n° 500, c'est-à-dire faisant passer dans

les termes compris sous le double signe d'intégration le d devant le δ, et intégrant par parties, on transformera ces termes de la manière suivante.

1° $$\int\int dxdy\mathrm{M}\frac{d\delta z}{dx}=\int dy\,.\,\mathrm{M}\delta z-\int\int dxdy\frac{d\mathrm{M}}{dx}\delta z+const.;$$

et par conséquent

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_\omega} dy\,.\,\mathrm{M}\frac{d\delta z}{dx}=-\int_{y_0}^{y_\omega} dy(\mathrm{M}\delta z)_{(x_0)}$$
$$+\int_{y_0}^{y_\omega} dy(\mathrm{M}\delta z)_{(x_\omega)}-\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_\omega} dy\frac{d\mathrm{M}}{dx}\delta z.$$

Les signes (x_0), (x_ω) mis au bas des parenthèses, indiquent que dans les quantités contenues dans ces parenthèses, on donne à x les valeurs $x=x_0$, $x=x_\omega$, c'est-à-dire que ces quantités ont les valeurs qui conviennent aux limites de la surface, parallèles au plan des y, z.

La même transformation donne

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_\omega} dy\,.\,\mathrm{N}\frac{d\delta z}{dy}=-\int_{x_0}^{x_\omega} dx(\mathrm{N}\delta z)_{(y_0)}$$
$$+\int_{x_0}^{x_\omega} dx(\mathrm{N}\delta z)_{(y_\omega)}-\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_0}^{y_0} dy\frac{d\mathrm{N}}{dy}\delta z.$$

Les signes (y_0), (y_ω) indiquent que les quantités contenues dans les parenthèses ont les valeurs qui conviennent aux limites de la surface, parallèles au plan des x, z.

2° $$\int\int dxdy\,\mathrm{P}\frac{d^2\delta z}{dx^2}=\int dy\mathrm{P}\delta\frac{dz}{dx}-\int dy\frac{d\mathrm{P}}{dx}\delta z$$
$$+\int\int dxdy\frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2}\delta z+const.,$$

d'où

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy\, \mathrm{P} \frac{d^2\delta z}{dx^2} =$$

$$\left[\begin{array}{l} -\int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\mathrm{P}\delta \frac{dz}{dx}\right)_{(x_0)} + \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\delta z\right)_{(x_0)} \\ +\int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\mathrm{P}\delta \frac{dz}{dx}\right)_{(x_\omega)} - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\delta z\right)_{(x_\omega)} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2}\delta z \end{array}\right]$$

$$3^\circ \int\int dxdy\mathrm{Q}\frac{d^2\delta z}{dxdy} = \int dx\,.\,\mathrm{Q}\frac{d\delta z}{dx} - \int dx \int dy \frac{d\mathrm{Q}}{dy}\frac{d\delta z}{dx} + const.$$

$$= \int dx\,.\,\mathrm{Q}\frac{d\delta z}{dx} - \int dy \frac{d\mathrm{Q}}{dy}\delta z + \int\int dxdy \frac{d^2\mathrm{Q}}{dxdy}\delta z + const.;$$

et par conséquent

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy\, \mathrm{Q} \frac{d^2\delta z}{dxdy} =$$

$$\left[\begin{array}{l} -\int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\mathrm{Q}\frac{d\delta z}{dx}\right)_{(y_0)} - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\delta z\right)_{(x_0)} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\mathrm{Q}\frac{d\delta z}{dx}\right)_{(y_\omega)} - \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\delta z\right)_{(x_\omega)} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2\mathrm{Q}}{dxdy}\delta z \end{array}\right]$$

Mais on a

$$\int dx\mathrm{Q}\frac{d\delta z}{dx} = \mathrm{Q}dz - \int dx \frac{d\mathrm{Q}}{dx}\delta z + const.$$

Ainsi l'expression précédente peut se changer en

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy Q \frac{d^2\delta z}{dxdy} =$$

$$\left[\begin{array}{l}
(Q\delta z)_{(x_0, y_0)} + (Q\delta z)_{(x_\omega, y_0)} - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\frac{dQ}{dx}\delta z\right)_{(y_0)} \\
+ \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dQ}{dy}\delta z\right)_{(x_0)} \\
-(Q\delta z)_{(x_0, y_\omega)} + (Q\delta z)_{(x_\omega, y_\omega)} + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\frac{dQ}{dx}\right)_{(y_\omega)} \\
- \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dQ}{dx}\delta z\right)_{(x_\omega)} + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2Q}{dxdy}\delta z
\end{array}\right]$$

Le terme suivant contenant R subira la même transformation que le terme contenant P : il suffit de changer dans ce dernier cas x en y.

En substituant ces valeurs dans l'équation qui exprime la condition du maximum ou minimum, elle deviendra

$$\left[\begin{array}{l}
(Q\delta z)_{(x_0, y_0)} - (Q\delta z)_{(x_\omega, y_0)} - (Q\delta z)_{(x_0, y_\omega)} + (Q\delta z)_{(x_\omega, y_\omega)} \\
- \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left[\left(M - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \text{etc.}\right)\delta z + (P - \text{etc.})\delta\frac{dz}{dx} + \text{etc.}\right]_{(x_0)} \\
+ \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left[\left(M - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \text{etc.}\right)\delta z + (P - \text{etc.})\delta\frac{dz}{dx} + \text{etc.}\right]_{(x_\omega)} \\
- \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left[\left(N - \frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy} + \text{etc.}\right)\delta z + (R - \text{etc.})\delta\frac{dz}{dy} + \text{etc.}\right]_{(y_0)} \\
+ \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left[\left(N - \frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy} + \text{etc.}\right)\delta z + (R - \text{etc.})\delta\frac{dz}{dy} + \text{etc.}\right]_{(y_\omega)} \\
+ \int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(L - \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy} + \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dxdy} + \frac{d^2R}{dy^2} - \text{etc.}\right)\delta z \\
= 0.
\end{array}\right]$$

Cette équation doit subsister pour toutes les valeurs qui peuvent être attribuées aux variations des coordonnées des

points intérieurs ou des points appartenant aux limites.

510. Nous aurons donc en premier lieu l'équation indéfinie

$$0 = L - \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy} + \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2R}{dxdy} + \frac{d^2R}{dy^2} + \text{etc.},$$

qui doit être satisfaite pour toutes les valeurs des coordonnées comprises entre les limites.

511. Nous voyons en second lieu que l'on doit poser

$$0 = (Q\delta z)_{(x_0, y_0)} - (Q\delta z)_{(x_\omega, y_0)} - (Q\delta z)_{(x_0, y_\omega)} + (Q\delta z)_{(x_\omega, y_\omega)},$$

en sorte que si les variations δz de l'ordonnée aux quatre sommets du rectangle, projection de la surface, sont arbitraires, il faudra que Q soit nulle pour les valeurs des coordonnées qui appartiennent à ces points.

De plus, nous avons l'équation

$$0 = \left(M - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \text{etc.}\right)\delta x + (P - \text{etc.})\delta\frac{dz}{dx} + \text{etc.}$$

qui doit subsister pour toutes les valeurs appartenant aux points situés sur les limites de la surface, parallèles aux xz; et enfin l'équation

$$0 = \left(N - \frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy} + \text{etc.}\right)\delta z + (R - \text{etc.})\delta\frac{dz}{dy} + \text{etc.}$$

qui doit subsister pour toutes les valeurs appartenant aux points situés sur les limites parallèles aux yz. Si les varia-

tions δz, $\delta \frac{dz}{dx}$, $\delta \frac{dz}{dy}$, etc., sont arbitraires, chaque terme de ces équations doit être égalé séparément à zéro.

Des cas où il existe des relations données entre les variables.

512. On a supposé généralement dans ce qui précède qu'il n'existait point de relations données d'avance entre les quantités qui entrent dans l'expression de la fonction V. Cependant la nature de la question établit le plus souvent des conditions auxquelles il est nécessaire d'avoir égard, en même temps que l'on satisfait à la condition du maximum ou minimum de l'intégrale définie proposée. L'effet des conditions dont il s'agit, est de restreindre l'étendue des valeurs qui peuvent être attribuées aux variations affectées du signe δ.

Si, par exemple, la valeur de l'intégrale définie proposée dépend de la figure d'une courbe, il peut se faire que les points extrêmes de cette courbe soient assujettis à se trouver sur deux lignes données, ayant pour équations $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$. Les variations δx_0 et δy_0 des coordonnées du premier point, et les variations δx_ω et δy_ω des coordonnées du dernier point, devront alors avoir entre elles les rapports convenables pour qu'elles puissent satisfaire respectivement à ces équations. On aura donc ici

$$\delta y_0 = \frac{d.\varphi(x_0)}{dx}\delta x_0, \quad \text{et} \quad \delta y_\omega = \frac{d.\psi(x_\omega)}{dx}\delta x_\omega,$$

équations qui devraient subsister en même temps que les

équations déterminées obtenues conformément à ce qui a été dit dans les n°s 501 et 503.

Si de plus la direction de la tangente aux extrémités de la courbe cherchée devait s'accorder aussi avec la direction de la tangente des courbes ayant pour équations $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, on aurait encore les équations

$$\delta \frac{dy_0}{dx} = \frac{d^2.\varphi(x_0)}{dx^2} \delta x_0, \quad \text{et} \quad \delta \frac{dy_\omega}{dx} = \frac{d^2.\psi(x_\omega)}{dx^2} \delta x_\omega.$$

Et ainsi de suite pour les autres fonctions différentielles. Au moyen de ces *équations de condition*, on éliminerait une partie des variations qui se trouveraient dans les équations déterminées. Après cette élimination, les variations restant dans ces équations se trouvant entièrement arbitraires, on égalerait séparément à zéro chacun de leurs coefficients.

513. Il existe quelquefois des équations de condition qui doivent subsister pour toutes les valeurs des variables comprises dans les limites de l'intégrale définie proposée. Par exemple, si l'on demande de tracer sur une surface donnée la ligne la plus courte entre deux points pris sur cette surface, il est évident qu'en désignant son équation par

$$F(x, y, z) = 0,$$

l'ordonnée de la ligne cherchée doit toujours satisfaire à cette équation. Dans un cas semblable, les variations des quantités qui entrent dans la fonction V étant restreintes par la condition que les valeurs de ces quantités satisfassent à l'équation donnée, cette équation doit subsister quand on y remplace ces quantités par leurs valeurs augmentées de ces variations. On peut donc différentier l'équation proposée par

rapport aux quantités dont il s'agit, en marquant les différentielles par δ. Ainsi

$$L = 0,$$

étant en général une équation de condition, dans laquelle L désigne une fonction quelconque des variables indépendantes, des fonctions dépendantes de ces variables et de leurs fonctions dérivées, on formera l'équation

$$\delta L = 0,$$

δ indiquant une différentiation effectuée par rapport à toutes ces quantités. Cette équation servira à éliminer une des variations qui se trouveront dans l'équation indéfinie que l'on forme en égalant à zéro le terme qui reste sous le signe d'intégration dans l'équation générale exprimant la condition du maximum ou minimum.

Il en serait de même s'il existait d'autres équations de condition

$$M = 0, \qquad N = 0, \qquad \text{etc.},$$

analogues à la précédente. On formerait également les équations

$$\delta M = 0, \qquad \delta N = 0, \qquad \text{etc.},$$

que l'on réunirait à l'équation indéfinie dont on vient de parler, afin d'éliminer autant de variations qu'il serait possible. Les coefficients des variations restantes seraient ensuite égalés séparément à zéro.

514. Dans d'autres questions, le maximum ou minimum cherché ne doit avoir lieu qu'autant qu'une certaine inté-

grale définie conserve une valeur déterminée. C'est ce qu'on nomme maximum ou minimum *relatif*. La recherche de la courbe qui, avec un contour donné, renferme l'aire la plus grande ou la moindre possible, est de ce genre. Il s'agit donc de rendre l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mathrm{V}$$

la plus grande ou la moindre possible, en même temps que l'on a l'équation

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mathrm{U} = const.,$$

U étant, aussi bien que V, une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. Les conditions du problème donnent les deux équations

$$\delta \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mathrm{V} = 0, \qquad \text{et} \qquad \delta \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mathrm{U} = 0.$$

Or, l'expression de ces conditions ne sera pas altérée si l'on ajoute la seconde équation à la première, après l'avoir multipliée par une constante arbitraire a. On peut donc écrire

$$\delta \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mathrm{V} + a\delta \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mathrm{U} = 0, \quad \text{ou} \quad \delta \int_{x_0}^{x_\omega} dx(\mathrm{V} + a\mathrm{U}) = 0.$$

On traitera cette dernière équation d'après les règles exposées ci-dessus, comme si l'on voulait rendre un maximum

ou un minimum absolu la fonction

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,(\mathrm{V} + a\mathrm{U}).$$

En effet, la relation entre y et z qui rendra cette fonction un maximum ou un minimum absolu, satisfait évidemment à la condition de rendre $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\mathrm{V}$ un minimum ou maximum pour les cas où $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\mathrm{U}$ prend une valeur donnée; car il en était autrement, il y aurait des valeurs de la somme $\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\mathrm{V} + a\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\mathrm{U}$, c'est-à-dire de $\int_{x_0}^{x_\omega} dx(\mathrm{V}+a\mathrm{U})$, seraient plus grandes ou moindres que les valeurs données le maximum ou minimum absolu, ce qui est impossible. onstante a se détermine de manière à donner à l'intégrale $^{\omega} dx.U$ la valeur que l'on a fixée dans chaque cas par-r.

xemples de l'application du calcul des variations.

On se proposera en premier lieu de déterminer la plus courte qui puisse être tracée entre deux lignes lonnées. Les coordonnées de la ligne cherchée étant ées par x, y, z, il s'agit donc de rendre un mini-nction

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx.\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

, x_ω étant variables. En appliquant à cette ex-

pression ce qui a été dit dans les n°s 505 et 507, on verra d'abord que l'on a les deux équations indéfinies

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\right)=0,$$

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\right)=0,$$

d'où résulte

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=const.,$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=const.$$

On en conclut que les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ doivent avoir des valeurs constantes, propriété qui n'appartient qu'à la ligne droite. Posant donc

$$\frac{dy}{dx}=b, \qquad \frac{dz}{dx}=c,$$

on aura

$$y=bx+m, \qquad z=cx+n,$$

pour les équations de la ligne cherchée, b, c, m et n étant des constantes arbitraires.

s conditions relatives aux limites, l'équation
ɔartenant au premier point de la ligne cher-

$$\overline{+\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2}\cdot\delta x_0$$

$$+\frac{\frac{dy_0}{dx}\left(\delta y_0-\frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right)+\frac{dz_0}{dx}\left(\delta z_0-\frac{dz_0}{dx}\delta x_0\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2}}$$

$$0=\delta x_0+\frac{dy_0}{dx}\delta y_0+\frac{dz_0}{dx}\delta z_0.$$

ıe dans cette équation δx_0, δy_0, δz_0 repré-
vement les projections sur les axes des x,
des déplacements qui peuvent être attribués
nt de cette ligne. Or, d'après la supposition,
se trouver constamment sur la première des
ıntre lesquelles la ligne de plus courte dis-
racée. Donc les variations δx_0, δy_0, δz_0 peu-
dées comme les projections sur les axes de
tte courbe voisin du premier point dont il
ı conclut que l'équation précédente exprime
la ligne de plus courte distance doit être per-
et élément.
une équation pareille pour l'autre extrémité
chée. La ligne la plus courte est donc une
ulaire aux deux courbes entre lesquelles elle

ıit conduit à un résultat semblable si la ligne
istance devait être menée entre deux surfaces

courbes données. Les variations δx_0, δy_0, δz_0 de l'équation précédente devraient être alors regardées comme exprimant les projections sur les axes d'un élément linéaire quelconque tracé à partir du premier point de cette ligne sur la surface courbe. Cette équation exprimerait donc que la ligne de plus courte distance doit être perpendiculaire à la surface.

Il en serait encore de même si la ligne de plus courte distance devait être tracée entre une courbe et une surface courbe donnée. Elle devrait toujours rencontrer l'une et l'autre à angle droit.

516. Admettons maintenant que la ligne la plus courte doit être tracée sur une surface donnée. L'intégrale qu'il s'agit de rendre un minimum étant toujours

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

il faut, conformément au n° 507, poser d'abord (en écrivant pour abréger W au lieu de $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$) l'équation indéfinie

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{W}\frac{dy}{dx}\right)\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{W}\frac{dz}{dx}\right)\left(\delta z - \frac{dz}{dx}\delta x\right),$$

et se souvenir que x, y, z devant satisfaire à l'équation de la surface, que nous représentons par

$$z = F(x, y),$$

les variations δx, δy, δz sont liées entre elles par l'équation

$$\delta z = \frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y;$$

ıc au lieu de δz cette valeur dans l'équation
uis on égalera séparément à zéro les coeffi-
δz, qui restent indéterminées, ainsi il viendra

$$\left(\frac{1}{W}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{W}\frac{dz}{dx}\right),$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{W}\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx} - \frac{dF}{dx}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{W}\frac{dz}{dx}\right).$$

hée étant tracée sur la surface dont l'équation
), les éléments dx, dy, dz des coordonnées
cette ligne doivent satisfaire à cette équation,
l'on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

ıbstituée dans la seconde des deux équations
nd identique avec la première, ainsi que cela

re équation détermine la nature de la ligne
distance qui est l'objet de la question : elle
propriété géométrique qui consiste en ce que
ateur est constamment perpendiculaire à la
uelle cette ligne est tracée.

on se rappelle l'équation du plan osculateur,
32, et l'équation du plan tangent à la surface

dont l'équation est $z = F(x, y)$, donnée au n° 217, on en conclura facilement que la condition nécessaire pour que ces deux plans soient perpendiculaires l'un à l'autre est, par le n° 215,

$$\frac{\frac{dF}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + 1 = 0;$$

en éliminant $\frac{dF}{dx}$ au moyen de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx},$$

elle devient

$$\left(\frac{dz}{dx} - \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

ou bien

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$+ \frac{dF}{dy}\left[\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0,$$

résultat identique avec l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{W}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{W}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

ainsi qu'on peut le vérifier en effectuant dans cette dernière les différentiations indiquées.

Les conditions relatives aux limites se déduiront, comme dans le n° 515, en considérant d'abord le premier point de

l'équation déterminée

$$0 = \delta x_0 + \frac{dy_0}{dx}\delta y_0 + \frac{dz_0}{dx}\delta z_0.$$

ier point est donné de position sur la surface, est satisfaite, puisque l'on a alors $\delta x_0 = 0$, $= 0$. Mais si la ligne de plus courte distance ne ligne courbe donnée tracée sur la surface, δx_0, δy_0, δz_0, expriment alors les projections les x, des y et des z, de l'élément de cette et par conséquent, l'équation précédente ligne de plus courte distance doit être perpen- élément.

ait un résultat analogue pour l'extrémité oppo- gne la plus courte doit couper à angles droits es entre lesquelles elle est tracée.

herche de la surface dont l'aire est un mini- problème analogue au précédent. Nous suppo- te surface doit se terminer à un contour dé- a projection sur le plan des x, y est donnée. l s'agit de rendre un maximum est ici

$$dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1},$$

pliquer les notions exposées dans les n°s 508 us aurons donc, conformément au n° 511, inie

$$0=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}\right)$$
$$+\frac{d}{dy}\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+1}}\right)$$

c'est-à-dire, en effectuant les différentiations indiquées,

$$0=\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1\right]\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dxdy}+\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+1\right]\frac{d^2z}{dy^2}.$$

Cette équation aux différences partielles du second ordre appartient à la surface demandée. Les fonctions arbitraires qui entreront dans son intégrale devraient être déterminées de manière à faire passer la surface par le contour donné. Lorsque ce contour est fixé, les équations déterminées relatives aux limites de l'intégrale sont vérifiées d'avance, et ne donnent lieu à aucune condition particulière.

518. Considérons encore le plus simple des problèmes connus sous le nom d'Isopérimètres, dont l'objet consiste à déterminer la figure de la courbe qui, sous un contour donné, comprend la plus grande aire possible. Il s'agit de rendre un maximum la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\,y,$$

tandis que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

aleur déterminée. Cette question se résout, ı ce qui a été dit n° 514, en déterminant les aximum absolu de la fonction

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left[y + a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right],$$

nombre indéterminé. Nous supposerons les , invariables. En appliquant donc les notions) et suivants, l'équation indéfinie du n° 501,

$$= 1 - a\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right);$$

ɔn intégrant une première fois,

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 0, \quad \text{ou} \quad dy = \frac{(x-\alpha)dx}{\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}},$$

tante arbitraire; et en intégrant une seconde

$$\sqrt{{}^2-(x-\alpha)^2}, \quad \text{ou} \quad (x-\alpha)^2 + (y-6)^2 = a^2,$$

le constante arbitraire. Ainsi le cercle résout ıestion proposée. La position du centre et le ètre déterminés de manière à faire passer la ır deux points donnés, et à donner à l'arc s points une valeur déterminée.

519. Nous traiterons enfin la question de la brachystochrône, ou courbe de la plus vite descente, en supposant que la vitesse initiale du mobile soumis à l'action de la gravité est nulle, et qu'il doit passer dans le moindre temps possible d'un point quelconque d'une courbe donnée à un point quelconque d'une autre courbe également donnée. L'axe des x étant supposé vertical, la fonction qu'il s'agit de rendre un minimum est

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{x-x_0}},$$

x_0 et x_ω représentant les abscisses des points extrêmes de la courbe décrite. Ces abscisses étant variables, on doit opérer ici conformément à ce qui a été dit dans les n°s 505 et 507. Il faut remarquer de plus que la quantité x_0 entre dans la fonction qui se trouve sous le signe $\int$. Nous avons, en comparant aux formules des numéros cités :

$$V=\sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{x-x_0}},$$

$$N=0,\ P=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}};$$

$$n=0,\ p=\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}.$$

Les équations indéfinies qui doivent subsister pour tous les

ne cherchée sont

$$\frac{dP}{dx}=0, \qquad \frac{dp}{dx}=0,$$

ıit

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=B,$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=C,$$

s constantes. Ces équations donnent

$$\frac{dz}{dy}=\frac{C}{B},$$

lut en premier lieu que la projection de la ie sur le plan horizontal des yz est une ligne conséquent que cette courbe est contenue dans l.

aître la nature de la courbe dont il s'agit, on que le plan vertical des xy se confond avec iel elle est placée. Son équation différentielle s à

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=B;$$

t

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x-x_0}{\frac{1}{B^2}-(x-x_0)}},$$

équation qui appartient à une cycloïde dont la base est une ligne horizontale passant par le point de départ du mobile. Le diamètre du cercle générateur est représenté par la constante $\frac{1}{B^2}$. On voit que le premier élément de la courbe de la plus vite descente sera toujours vertical.

A l'égard des conditions relatives aux limites de l'intégrale, l'équation déterminée donnée par les termes qui ne sont point sous le signe d'intégration, est ici

$$\left[\begin{array}{l} -V_0\delta x_0-P_0\left(\delta y_0-\frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right)-p_0\left(\delta z_0-\frac{dz_0}{dx}\delta x_0\right) \\ +V_\omega\delta x_\omega+P_\omega\left(\delta y_\omega-\frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega\right)+p_\omega\left(\delta z_\omega-\frac{dz_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) \\ +\delta x_0\int_{x_0}^{x_\omega}dx.\mu \\ \qquad\qquad\qquad\qquad =0; \end{array}\right]$$

et l'on a

$$\mu=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{2(x-x_0)^{\frac{3}{2}}}.$$

On trouvera la valeur de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_\omega}dx.\mu$ en remarquant que la différentielle complète de la fonction V est

$$dV=-\mu dx+Pd\left(\frac{dy}{dx}\right)+pd\left(\frac{dz}{dx}\right).$$

ci-dessus que les fonctions P et p devaient être
ns toute l'étendue de la courbe. On peut donc
$_\omega$ au lieu de P et p, ce qui donne

$$/ = -\mu dx + P_\omega d\left(\frac{dy}{dx}\right) + p_\omega d\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

en intégrant

$$= V_0 - V_\omega + P_\omega\left(\frac{dy_\omega}{dx} - \frac{dy_0}{dx}\right) + p_\omega\left(\frac{dz_\omega}{dx} - \frac{dz_0}{dx}\right).$$

ette valeur dans l'équation déterminée précé-
arquant que $P_0 = P_\omega$ et $p_0 = p_\omega$, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} P_\omega\left(\delta y_0 - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_0\right) - p_\omega\left(\delta z_0 - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_0\right) \\ P_\omega\left(\delta y_\omega - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) + p_\omega\left(\delta z_\omega - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) \end{array}\right] = 0,$$

çant V_ω, P_ω et p_ω par leurs valeurs,

$$= \left[\begin{array}{l} -\delta x_0 - \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_0 - \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_0 \\ +\delta x_\omega + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_\omega \end{array}\right].$$

des coordonnées des deux points extrêmes
étant respectivement indépendantes l'une de
quation se partage dans les deux suivantes

$$0 = \delta x_0 + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_0 + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_0$$

$$0 = \delta x_\omega + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_\omega$$

qui indiquent évidemment que le dernier élément de la courbe cherchée doit être perpendiculaire à la fois aux tangentes menées aux deux courbes données dans les points de départ et d'arrivée du mobile. Il en résulte que si les deux courbes étaient données dans un même plan vertical, leurs tangentes menées aux points extrêmes de la brachystochrône devraient être parallèles entre elles.

Ainsi la courbe demandée est une portion de cycloïde dont la base est horizontale et dont l'origine est au point de départ du mobile. Elle coupe à angle droit la courbe d'arrivée, et l'origine est tellement placée sur la courbe de départ, que la tangente menée par cette origine à cette courbe est perpendiculaire à la tangente menée à l'extrémité inférieure de la portion cycloïdale.

XL. CALCUL DES DIFFÉRENCES FINIES.

520. Le caractère de l'analyse différentielle, et ce qui la distingue de l'analyse ordinaire, ou de l'analyse algébrique, consiste en ce qu'on y regarde les quantités comme variables, et que l'on considère à la fois la succession infinie des valeurs qui peuvent leur être attribuées ; tandis que dans l'analyse algébrique on regarde toujours les quantités comme ayant des valeurs déterminées connues ou inconnues. Dans le calcul différentiel proprement dit, les valeurs successives des quantités sont censées se succéder d'une manière continue, et par intervalles infiniment petits, c'est-à-dire plus petits que toute grandeur donnée. L'objet principal de ce calcul consiste dans la recherche des rapports qui existent entre les variations correspondantes des variables et des fonctions dépendantes de ces variables, rapports qui don-

à de nouvelles fonctions dont la considéra-
aire dans les applications principales des ma-
ıx arts et à la philosophie naturelle. Dans le
'érences, les quantités sont supposées varier
, déterminés et d'une grandeur finie. Cette
alyse considère d'ailleurs, aussi bien que le
tiel, les relations qui existent entre les va-
ariables et celles des fonctions qui en dé-

:ul des différences finies est fondé sur un algo-
ut d'abord faire connaître. Soit u une fonction
une ou de plusieurs variables indépendantes
La composition de la fonction u est donnée, et
les variables indépendantes comme pouvant
ssivement plusieurs valeurs déterminées x_0,
, y_1, z_1, etc.; x_2, y_2, z_2, etc.; x_3, y_3, z_3, etc.;
ite. Le plus ordinairement ces variables sont
ier par différences constantes, et quelquefois
ɜ égaux à l'unité. La loi de cette variation,
puisse être, est supposée donnée. En vertu
dont il s'agit, la fonction u prendra égale-
ɜ de valeurs déterminées, que nous représen-

, u_1, u_2, u_3, u_4, ... u_{n-1}, u_n;

ıns comme dans l'article VI,

u_0			
u_1	$u_1 - u_0 = \Delta u_0$		
u_2	$u_2 - u_1 = \Delta u_1$	$\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0$	
u_3	$u_3 - u_2 = \Delta u_2$	$\Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1$	
u_4	$u_4 - u_3 = \Delta u_3$	$\Delta u_3 - \Delta u_2 = \Delta^2 u_2$	
	. . . . .	$\Delta u_4 - \Delta u_3 = \Delta^2 u_3$	
	. . . . .	. . . . .	
u_{n-1}	. . . . .	. . . . .	
u_n	$u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1}$	. . . . .	
		$\Delta u_n - \Delta u_{n-1} = \Delta^2 u_{n-1}$	etc.

On voit que le signe Δ indique la différence entre la valeur actuelle de la quantité affectée de ce signe, et la valeur que reçoit cette quantité par l'effet d'un changement fini, attribué aux valeurs des variables dont elle dépend. Δu_0 est la *différence* de la fonction u_0. On représente par $\Delta\Delta u_0$, ou $\Delta^2 u_0$, la différence de Δu_0, ou la *différence seconde* de la fonction u_0. On représente également par $\Delta\Delta^2 u_0$, ou $\Delta^3 u_0$, la différence de $\Delta^2 u_0$, ou la *différence troisième* de la fonction u_0. Et ainsi de suite. Il existe entre les valeurs successives d'une fonction et ses différences de divers ordres des relations générales, et tout à fait indépendantes de la nature de cette fonction et de la loi de sa variation.

522. En effet, on trouve par de simples substitutions, comme on l'a vu dans l'article X,

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + \Delta u_0 \\
u_2 &= u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 \\
u_3 &= u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 \\
u_4 &= u_0 + 4\Delta u_0 + 6\Delta^2 u_0 + 4\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots + \Delta^n u_0;$$

i peut s'écrire d'une manière abrégée

$$u_n = (1 + \Delta u_0)^n,$$

ant de changer, après le développement de la puis-
iquée, $(\Delta u_0)^r$ en $\Delta^r u_0$.

on trouve également, par des substitutions succes-

$$\begin{aligned}
\Delta u_0 &= u_1 - u_0 \\
\Delta^2 u_0 &= u_2 - 2u_1 + u_0 \\
\Delta^3 u_0 &= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0 \\
\Delta^4 u_0 &= u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= u_n - n.u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-3} + \ldots \pm u_0.
\end{aligned}$$

e formule peut s'écrire

$$\Delta^n u_0 = (u_0 - 1)^n,$$

observant de changer, après le développement, u^n en u_n.
e peut servir à trouver directement les différences d'un
dre quelconque d'une fonction proposée, au moyen d'un
rtain nombre de valeurs successives de cette fonction. Le
ombre des valeurs qu'il est nécessaire de connaître est égal
l'ordre de la différence cherchée.

524. On indique par le signe Σ une opération inverse de celle qui est indiquée par le signe Δ. Ainsi Σu_0 représente la quantité dont la différence est u_0. Nous écrirons donc, en continuant le tableau précédent vers la gauche,

$$\text{etc.,}\left|\begin{array}{l|l|l}
\Sigma^2 u_1 - \Sigma^2 u_0 = \Sigma u_0 & & \\
\Sigma^2 u_2 - \Sigma^2 u_1 = \Sigma u_1 & \Sigma u_1 - \Sigma u_0 = u_0 & u_0 \\
\Sigma^2 u_3 - \Sigma^2 u_2 = \Sigma u_2 & \Sigma u_2 - \Sigma u_1 = u_1 & u_1 \\
\Sigma^2 u_4 - \Sigma^2 u_3 = \Sigma u_3 & \Sigma u_3 - \Sigma u_2 = u_2 & u_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \Sigma u_4 - \Sigma u_3 = u_3 & u_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\Sigma^2 u_{n+1} - \Sigma^2 u_n = \Sigma u_n & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
 & \Sigma u_{n+1} - \Sigma u_n = u_n & u_n \\
 & & u_{n+1}
\end{array}\right|$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
\Sigma u_1 &= \Sigma u_0 + u_0 \\
\Sigma u_2 &= \Sigma u_0 + u_0 + u_1 \\
\Sigma u_3 &= \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 \\
\Sigma u_4 &= \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Sigma u_n &= \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_{n-1}.
\end{aligned}$$

On voit que Σu_n, ou l'intégrale finie de u_n, c'est-à-dire la quantité dont la différence est u_n, se forme de l'addition des n valeurs de la fonction u qui précèdent la valeur u_n, et d'une quantité Σu_0 qu'il faut regarder ici en général comme une constante arbitraire. En effet, supposant u donnée, et par conséquent u_0, u_1, u_2, u_3, etc., on n'a assujetti, en écrivant les équations précédentes, les quantités Σu et Σu_0 à aucune autre condition, si ce n'est celle d'avoir pour différence u_0. Donc l'une de ces quantités est une constante arbitraire.

On déduit également des équations précédentes :

$$\Sigma^2 u_1 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0$$
$$\Sigma^2 u_2 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1$$
$$\Sigma^2 u_3 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1 + \Sigma u_2$$
$$\Sigma^2 u_4 = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1 + \Sigma u_2 + \Sigma u_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma^2 u_n = \Sigma^2 u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma u_1 + \Sigma u_2 + \Sigma u_3 + \ldots\ldots + \Sigma u_{n-1};$$

$$\Sigma^3 u_1 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0$$
$$\Sigma^3 u_2 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1$$
$$\Sigma^3 u_3 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1 + \Sigma^2 u_2$$
$$\Sigma^3 u_4 = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1 + \Sigma^2 u_2 + \Sigma^2 u_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma^3 u_n = \Sigma^3 u_0 + \Sigma^2 u_0 + \Sigma^2 u_1 + \Sigma^2 u_2 + \Sigma^2 u_3 + \ldots + \Sigma^2 u_{n-1};$$

ainsi de suite. On a en général

$$\Sigma^i u_n = \Sigma^i u_0 + \Sigma^{i-1} u_0 + \Sigma^{i-1} u_1 + \Sigma^{i-1} u_2 + \ldots\ldots + \Sigma^{i-1} u_{n-1}.$$

n doit remarquer que dans la valeur de $\Sigma^2 u_n$, il entre deux onstantes arbitraires, qui sont $\Sigma^2 u_0$ et Σu_0. Dans la valeur le $\Sigma^3 u_n$, il entre explicitement les deux arbitraires $\Sigma^3 u_0$ et $\Sigma^2 u_0$, et implicitement l'arbitraire Σu_0 qui est comprise dans $\Sigma^2 u_1$, $\Sigma^2 u_2$, etc., et ainsi de suite. Enfin dans la valeur de $\Sigma^i u_n$, il entre explicitement les deux arbitraires $\Sigma^i u_0$ et $\Sigma^{i-1} u_0$, et implicitement les $i-2$ arbitraires $\Sigma^{i-2} u_0$, $\Sigma^{i-3} u_0$, $\Sigma^{i-4} u_0$, ...Σu_0 qui sont comprises dans $\Sigma^{i-1} u_1$, $\Sigma^{i-1} u_2$, $\Sigma^{i-1} u_3$, etc.; en sorte que l'intégrale $\Sigma^i u_n$ comprend toujours i constantes arbitraires.

525. Nous devons remarquer d'ailleurs qu'il n'est pas toujours indispensable que dans l'intégrale

$$\Sigma u_n = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_{n-1},$$

la quantité désignée par Σu_0, qui la complète, soit une constante. On pourrait prendre pour cette quantité une fonction quelconque des variables qui entrent dans la fonction u, pourvu que la fonction dont il s'agit eût la propriété de ne point changer de valeur lorsque ces variables prendraient leurs valeurs successives. On sait qu'il existe plusieurs fonctions trigonométriques qui présentent cette propriété quand on fait varier les variables par différences constantes.

Différentiation des fonctions.

526. Soit u une fonction contenant une seule variable x. Différentier la fonction u, c'est chercher la valeur de l'accroissement Δu que reçoit cette fonction lorsque la variable x devient $x + \Delta x$. Ainsi de l'équation

$$u = f(x),$$

nous concluons en général

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Si la fonction u contient plusieurs variables indépendantes x, y, z, etc., cette fonction peut être différentiée séparément par rapport à chacune des variables. Posant

$$u = f(x, y, z, \text{ etc.}),$$

ences sont exprimées séparément par

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x = f(x + \Delta x, y, z, \text{etc.},) - f(x, y, z, \text{etc.}),$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta y}\Delta y = f(x, y + \Delta y, z, \text{etc.},) - f(x, y, z, \text{etc.}),$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta z}\Delta z = f(x, y, z + \Delta z, \text{etc.},) - f(x, y, z, \text{etc.}),$$

etc.

érence totale est

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \text{etc.}) - f(x, y, z, \text{etc.}).$$

différence totale n'est pas, en général, égale à la ne des différences partielles. Elle le serait si la fonction y, z, etc.) était une somme de fonctions séparément ives aux diverses variables x, y, z, etc.

27. Considérons en premier lieu les fonctions ration- es et entières d'une seule variable x. Elles sont compo- s de termes de la forme Ax^k, A et k étant des constantes : recherche de leurs différences se réduit à trouver celles de quantité x^k.

Nous avons généralement

$$\Delta . x^k = (x + \Delta x)^k - x^k,$$

ou bien

$$\Delta . x^k = kx^{k-1}\Delta x + \frac{k(k-1)}{1.2}x^{k-2}(\Delta x)^2$$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}x^{k-3}(\Delta x)^3 + \ldots\ldots + (\Delta x)^k.$$

Si la différence Δx est supposée constante, on obtient facilement l'expression générale de la différence d'un ordre quelconque de la fonction proposée. En effet, on a alors

$$\begin{aligned} u_0 &= x^k, \\ u_1 &= (x + \Delta x)^k, \\ u_2 &= (x + 2\Delta x)^k, \\ u_3 &= (x + 3\Delta x)^k, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

et la formule du n° 523 donne

$$\begin{aligned} \Delta^n . x^k = (x + n\Delta x)^k - n[x + (n-1)\Delta x]^k \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}[x + (n-2)\Delta x]^k - \text{etc.}; \end{aligned}$$

ou en développant et ordonnant par rapport aux puissances de Δx,

$$\Delta^n . x^k =$$

$$\left[\begin{aligned} &\left[1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right] x^k \\ &+ k\left[n - \frac{n}{1}(n-1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2) - \ldots\ldots\ldots\ldots\right] x^{k-1}\Delta x \\ &+ \frac{k(k-1)}{1.2}\left[n^2 - \frac{n}{1}(n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^2 - \ldots\right] x^{k-2}(\Delta x)^2 \\ &+ \text{etc.}, \end{aligned}\right]$$

expression dont la loi est évidente.

528. Nous remarquerons d'ailleurs : 1° que le terme affecté de x^k est nul, quel que soit le nombre entier n, comme on peut le vérifier; 2° que la quantité

$$n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^i + \text{etc.}$$

ment nulle, tant que i est plus petit que n, ce que t également vérifier, et ce qui doit être, puisque l'ex- $\Delta^n . x^i$ ne peut pas contenir de puissances de Δx in- s à la puissance n; 3° enfin que l'on a toujours

$$3.....n = n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n - \text{etc.},$$

e on peut s'en assurer. Nous écrirons donc simple-, au lieu de l'expression précédente:

$$\Delta^n . x^k =$$

$$\left[\begin{array}{l} k(k-1)(k-2).....(k-n+1)x^{k-n}\Delta x^n \\ \frac{k(k-1)(k-2).....(k-n)}{1.2.3.....(n+1)}\left[n^{n+1} - n(n-1)^{n+1}\right. \\ \qquad \left. + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+1} - .....\right]x^{k-n-1}\Delta x^{n+1} \\ - \frac{k(k-1)(k-2)...[k-(n+1)]}{1.2.3.....(n+2)}\left[n^{n+2} - n(n-1)^{n+2}\right. \\ \qquad \left. + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+2} - .....\right]x^{k-n-2}\Delta x^{n+2} \\ + \frac{k(k-1)(k-2)...[k-(n+2)]}{1.2.3.....(n+3)}\left[n^{n+3} - n(n-1)^{n+3}\right. \\ \qquad \left. + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+3} - .....\right]x^{k-n-3}\Delta x^{n+3} \\ + \text{etc.}..... \end{array}\right]$$

On peut remarquer que dans le cas où l'exposant k est un nombre entier et positif : 1° la valeur de la différence de l'ordre k de la fonction x^k se réduit à une constante dont l'expression est

$$\Delta^k . x^k = k(k-1)(k-2)(k-3)..... 3.2.1\Delta x^k;$$

2° l'expression précédente de $\Delta^n . x^k$ se termine alors par un dernier terme qui est

$$\left[n^k - n(n-1)^k + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^k - \ldots\ldots\ldots\right]\Delta x^k.$$

Ces résultats donneront les différences d'un ordre quelconque de toutes les fonctions de la forme

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{etc.}$$

Parmi les fonctions rationnelles entières on distingue, à raison de la simplicité de l'expression de leurs différences, les produits de facteurs équi-différents, tels que la fonction

$$u = (a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots[a+x+(k-1)\Delta x].$$

On trouve facilement

$$\Delta^n u = [a+x+n\Delta x][a+x+(n-1)\Delta x]\ldots\ldots[a+x+(k-1)\Delta x]$$
$$\times k(k-1)(k-2)\ldots\ldots(k-n+1).\ \Delta x^n.$$

529. Quant aux fonctions rationnelles fractionnaires on en obtient les différences en les décomposant en fractions simples par les méthodes connues. L'expression de la différence se simplifie lorsque le numérateur est une constante et le dénominateur un produit de facteurs équi-différents. Soit

$$u = \frac{A}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots[a+x+(k-1)\Delta x]};$$

on a

$$\Delta^n u = \frac{\pm A\,.\,k(k+1)(k+2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(k+n-1)\,.\,\Delta x^n}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots[a+x+(k+n-1)\Delta x]}.$$

; + ou — ont lieu respectivement lorsque n est npair.

ous considérerons maintenant les fonctions trans- s. Soit

$$u = \log.x :$$

rons

$$\Delta u = \log.(x + \Delta x) - \log.x = \log.\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

développant

$$u = \mathrm{M}\left[\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^4 + \text{etc.}\right].$$

a différence Δx est supposée constante, on a

$$u_1 = \log.(x + \Delta x) = \log.\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) + \log.x,$$

$$u_2 = \log.(x + 2\Delta x) = \log.\left(1 + \frac{2\Delta x}{x}\right) + \log.x,$$

$$u_3 = \log.(x + 3\Delta x) = \log.\left(1 + \frac{3\Delta x}{x}\right) + \log.x,$$

etc.

développant ces expressions et les substituant dans les rmules du n° 523, on trouvera

$$\Delta \log.x = \mathrm{M}\left[\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \text{etc.}\right],$$

$$\Delta^2 \log.x = \mathrm{M}\left[\quad - \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \text{etc.}\right],$$

$$\Delta^3 \log.x = \mathrm{M}\left[\qquad\qquad 2\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \text{etc.}\right],$$

etc.

M est le module logarithmique, c'est-à-dire le nombre par lequel il faut multiplier les logarithmes hyperboliques pour avoir ceux du système de logarithmes dans lequel on calcule.

531. La fonction exponentielle a^x donne, en supposant toujours la différence Δx constante,

$$\begin{aligned}
\Delta a^x &= a^x(a^{\Delta x} - 1)\\
\Delta^2 a^x &= a^x(a^{\Delta x} - 1)^2\\
\Delta^3 a^x &= a^x(a^{\Delta x} - 1)^3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta^n a^x &= a^x(a^{\Delta x} - 1)^n.
\end{aligned}$$

532. A l'égard des fonctions trigonométriques, en partant des formules connues

$$\sin.A - \sin.B = 2\sin.\frac{1}{2}(A - B).\cos.\frac{1}{2}(A + B),$$

$$\cos.A - \cos.B = -2\sin.\frac{1}{2}(A - B).\sin.\frac{1}{2}(A + B),$$

on trouve

$$\Delta\sin.x = \sin.(x + \Delta x) - \sin.x = 2\sin.\frac{1}{2}\Delta x.\cos.\frac{1}{2}(2x + \Delta x);$$

$$\Delta\cos.x = \cos.(x + \Delta x) - \cos.x = -2\sin.\frac{1}{2}\Delta x.\sin.\frac{1}{2}(2x + \Delta x);$$

puis

$$\begin{aligned}
\Delta^2\sin.x &= 2\sin.\frac{1}{2}\Delta x\left[\cos.\frac{1}{2}(2x + 3\Delta x) - \cos.\frac{1}{2}(2x + \Delta x)\right]\\
&= -4\sin.^2\frac{1}{2}\Delta x.\sin.(x + \Delta x).
\end{aligned}$$

Et en continuant de la même manière, on parvient aux formules générales

$$\Delta^{2n} \sin.x = \pm 2^{2n} \sin.^{2n} \frac{1}{2} \Delta x . \sin. \frac{1}{2}(2x + 2n\Delta x)$$

$$\Delta^{2n+1} \sin.x = \pm 2^{2n+1} \sin.^{2n+1} \frac{1}{2} \Delta x . \cos. \frac{1}{2}\left[2x + (2n+1)\Delta x\right].$$

Les signes + ou — ont lieu respectivement suivant que le nombre n est pair ou impair.

La différence de l'ordre n de la fonction sin. x s'exprime d'une manière encore plus simple au moyen des différences des ordres $n-1$ et $n-2$. On obtient en effet l'expression

$$\Delta^n \sin.x = -2^2 \sin.^2 \frac{1}{2} \Delta x(\Delta^{n-1} \sin.x + \Delta^{n-2} \sin.x),$$

qui se déduit des précédentes.

533. On pourra toujours, d'après ce qui précède, et conformément à ce qu'on a vu n° 526, obtenir les différences partielles ou totales des fonctions de plusieurs variables.

Soit par exemple la fonction

$$u = xy :$$

on trouve, en supposant Δx constante

$$\Delta u = (x + \Delta x)\Delta y + \Delta x . y$$
$$\Delta^2 u = (x + 2\Delta x)\Delta^2 y + 2\Delta x . \Delta y$$
$$\Delta^3 u = (x + 2\Delta x)\Delta^3 y + 3\Delta x . \Delta y$$

etc.

Soit encore la fonction

$$u = \frac{x}{y}:$$

on aura

$$\Delta u = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2}\left[1 - \frac{\Delta y}{y} + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 - \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

534. Les différences totales des fonctions de plusieurs variables s'expriment au moyen de leurs différences partielles, par des formules remarquables. Soit u une fonction des deux variables x, y, dont nous supposons les différences Δx et Δy constantes. On a

$$\Delta u = \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta u}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y}\Delta x \Delta y,$$

expression qui peut s'écrire

$$\Delta u = \left[\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta x}\Delta x\right)\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta y}\Delta y\right) - 1\right]u.$$

Et l'on trouvera

$$\Delta^2 u = \left[\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta x}\Delta x\right)\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta y}\Delta y\right) - 1\right]^2 u$$

$$\Delta^3 u = \left[\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta x}\Delta x\right)\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta y}\Delta y\right) - 1\right]^3 u$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\Delta^n u = \left[\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta x}\Delta x\right)\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta y}\Delta y\right) - 1\right]^n u.$$

On obtient des formules analogues lorsque la fonction pro-

posée contient un plus grand nombre de variables. Si u contient les trois variables x, y, z, on a également

$$\Delta^n u = \left[\left(1+\frac{\Delta}{\Delta x}\Delta x\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta y}\Delta y\right)\left(1+\frac{\Delta}{\Delta z}\Delta z\right)-1\right]^n u;$$

et ainsi de suite.

Intégration des fonctions.

535. Soit en premier lieu la fonction x^m. En écrivant $m+1$ au lieu de k dans la formule du n° 527, elle devient

$$\Delta . x^{m-1} = \frac{m+1}{1} x^m(\Delta x) + \frac{m+1}{1}\,\frac{m}{2} x^{m-1}(\Delta x)^2 + \ldots\ldots + (\Delta x)^{m+1}$$

et donne, en prenant l'intégrale de chaque membre,

$$x^{m+1} = \frac{m+1}{1}\Sigma x^m . (\Delta x) + \frac{m+1}{1}\,\frac{m}{2}\Sigma x^{m-1}(\Delta x)^2 + \ldots + \Sigma x^0(\Delta x)^{m+1};$$

d'où l'on déduit

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{1}{m+1}\left[\frac{m+1}{1}\,\frac{m}{2}(\Delta x)\Sigma x^{m-1}\right.$$
$$\left. + \frac{m+1}{1}\,\frac{m}{2}\,\frac{m+1}{3}(\Delta x)^2\Sigma x^{m-2} + \ldots\ldots + (\Delta x)^m\Sigma x^0\right].$$

Si l'on fait successivement dans cette formule $m=0$, $=1$, $=2$, etc., on trouvera

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{\Delta x}$$

$$\Sigma x^1 = \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{1}{2}x$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x\,\Delta x$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\Delta x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2\Delta x$$

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\Delta x} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\Delta x - \frac{1}{30}x(\Delta x)^3$$

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6\Delta x} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4\Delta x - \frac{1}{12}x^2(\Delta x)^3$$

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7\Delta x} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{6}x^5\Delta x - \frac{1}{6}x^3(\Delta x)^3 + \frac{1}{42}x(\Delta x)^5$$

etc.

Chacune de ces intégrales doit être complétée par une constante arbitraire. Cette constante se détermine lorsqu'on fixe en même temps le premier terme de la série des quantités $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots$ ou $x_0, x_0 + \Delta x, x_0 + 2\Delta x$, etc.; et le premier terme de la série des quantités $\Sigma x_0, \Sigma x_1, \Sigma x_2$, etc.

Ces résultats donneront les intégrales de toutes les fonctions algébriques rationnelles et entières, l'incrément Δx étant supposé constant.

536. On a, d'après le n° 528, en écrivant m au lieu de $k-1$,

$$\Delta\left\{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)\right\} =$$
$$(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x).(m+1)\Delta x\,;$$

et par conséquent en intégrant de part et d'autre,

$$\Sigma\left\{(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)\right\} =$$
$$\frac{1}{(m+1)\Delta x}(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)+const.$$

537. On a également, d'après le n° 520,

$$\Delta\left\{\frac{A}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots[a+x+(m-1)\Delta x]}\right\}$$
$$=\frac{-Am\Delta x}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)},$$

et par conséquent

$$\Sigma\left[\frac{A}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)}\right]$$
$$=\frac{1}{m\Delta x}\,\frac{-A}{(a+x)(a+x\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots(a+x+(m-1)\Delta x)}+const.$$

538. L'équation

$$\Delta a^x = a^x(a_\Delta{}^x - 1)$$

du n° 531 donne

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a_\Delta{}^x - 1} + C,$$

C étant la constante arbitraire, d'où l'on passe facilement à

$$\Sigma^2 a^x = \frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^2} + \Sigma C$$
$$\Sigma^3 a^x = \frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^3} + \Sigma^2 C$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma^n a^x = \frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^n} + \Sigma^{n-1} C.$$

Quant aux expressions ΣC, $\Sigma^2 C$, ... $\Sigma^{n-1} C$, il faut remarquer que, d'après le n° 535, $\Sigma x^0 = \Sigma 1 = \frac{x}{\Delta x}$. Donc $\Sigma C = \frac{Cx}{\Delta x} + C'$,

C′ étant une nouvelle constante arbitraire. Les formules du même numéro donneront également les expressions $\Sigma^2 C$, $\Sigma^3 C$, etc.; et l'on voit que l'intégrale $\Sigma^n a^n$ contiendra n constantes arbitraires, conformément à ce qui a été dit n° 524.

539. A l'égard des fonctions circulaires, l'équation

$$\Delta \cos.x = -2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x . \sin. \left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right)$$

du n° 532 donne

$$\sin. \left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right) = -\frac{\Delta \cos.x}{2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x}, \text{ et } \sin.x = -\frac{\Delta \cos. \left(x - \frac{1}{2} \Delta x\right)}{2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x};$$

d'où, en intégrant,

$$\Sigma \sin.x = -\frac{\cos. \left(x - \frac{1}{2} \Delta x\right)}{2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x} + const.$$

On déduira de la même manière de l'équation

$$\Delta \sin.x = 2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x . \cos. \left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right)$$

du même numéro,

$$\Sigma \cos.x = \frac{\sin. \left(x - \frac{1}{2} \Delta x\right)}{2 \sin. \frac{1}{2} \Delta x}.$$

On peut, au moyen de ces formules, intégrer les fonctions composées de termes de la forme $\sin.^m x . \cos.^n x$, lorsque

m et n sont des nombres entiers et positifs. En effet, ces fonctions peuvent être transformées en une suite de termes contenant les sinus ou cosinus des arcs multiples de l'arc x; et l'on a évidemment

$$\Sigma \sin.(p+qx) = -\frac{\cos.\left(p+qx-\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x}$$

$$\Sigma \cos.(p+qx) = \frac{\sin.\left(p+qx-\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x}.$$

540. Si l'on cherche à appliquer aux intégrales finies le procédé de l'intégration par parties, on posera, en désignant par P, Q deux fonctions quelconques de la variable x,

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P + z,$$

z étant une fonction de la même variable, qu'il s'agit de déterminer. Différentiant chaque membre de l'équation, il viendra

$$PQ = (Q+\Delta Q).\Sigma(P+\Delta P) - Q.\Sigma P + \Delta z,$$

ou (en remarquant que $\Sigma.\Delta P = P$),

$$0 = \Delta Q.\Sigma(P+\Delta P) + \Delta z, \quad \text{d'où} \quad z = -\Sigma[\Delta Q.\Sigma(P+\Delta P)].$$

Donc

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Sigma[\Delta Q.\Sigma(P+\Delta P)],$$

ou

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Sigma(\Delta Q.\Sigma P_1);$$

et par suite

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.\Sigma^2 P_1 + \Sigma(\Delta^2 Q.\Sigma^2 P_2),$$
$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q.\Sigma^3 P_2 - \Sigma(\Delta^3 Q.\Sigma^3 P_3),$$

etc.

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.(\Sigma^2 P_1) + \Delta^2 Q.\Sigma^3 P_2 - \Delta^3 Q.\Sigma^4 P_3 + \Delta^4 Q.\Sigma^5 P_4 - \text{etc.}$$

Cette formule peut être mise aussi sous la forme

$$\Sigma PQ = Q.\Sigma P - \Delta Q.(\Sigma^2 P + \Sigma P) + \Delta^2 Q.(\Sigma^3 P + 2\Sigma^2 P + \Sigma P)$$
$$- \Delta^3 Q.(\Sigma^4 P + 3\Sigma^3 P + 3\Sigma^2 P + \Sigma P) + \text{etc.}$$

Elle s'arrête lorsque les différences d'un ordre quelconque de la fonction Q deviennent constantes.

Sommation des suites.

541. On a vu, n° 524, que l'on avait généralement

$$\Sigma u_n = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1},$$

formule dans laquelle Σu_0 représente une constante arbitraire. Par conséquent, si nous écrivons

$$Su_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n;$$

c'est-à-dire si nous représentons en général par Su_n la somme des valeurs de la fonction u jusques à la valeur u_n, y compris cette valeur, nous aurons la relation

$$Su_n = \Sigma u_n + u_n + const.$$

On voit qu'il est nécessaire de distinguer l'*intégrale* désignée par le signe Σ de la *somme* désignée par le signe S. Ces quantités diffèrent en ce que la dernière exprime la somme des termes de la suite u_0, u_1, u_2, etc., jusques et compris

le terme u_n, tandis que ce dernier terme n'est pas compris dans l'intégrale. On peut d'ailleurs supprimer l'indice n, et écrire simplement

$$Su = \Sigma u + u + const.$$

La constante se détermine d'après la connaissance du terme par lequel doit commencer la série des fonctions désignées par u, dont Su représente la somme.

542. Soit demandée, par exemple, la somme des puissances des nombres entiers. On fera dans les formules du n° 535, $\Delta x = 1$, et l'on aura, en déterminant la constante de manière que les séries commencent par l'unité, cas dans lequel sa valeur est nulle,

$$Sx = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$Sx^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

$$Sx^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$Sx^4 = 1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \ldots\ldots + x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$$

$$Sx^5 = 1 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + \ldots\ldots + x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

$$Sx^6 = 1 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + \ldots\ldots + x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x$$

etc.

543. La formule du n° 536 donne

$$S\left\{(a + x + \Delta x)(a + x + 2\Delta x)\ldots(a + x + m\Delta x)\right\}$$
$$= \frac{1}{(m+1)\Delta x}(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots[a+x+(m+1)\Delta x] + const.,$$

expression d'où l'on déduit la somme des suites des nombres figurés. Le terme général de ces suites est

$$\frac{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+m)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots m},$$

et l'on a, en faisant dans la formule précédente $a=0$ et $\Delta x=1$,

$$S\frac{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+m)}{1.2.3\ldots\ldots m}=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+m+1)}{1.2.3\ldots\ldots(m+1)}+const.,$$

Ainsi un terme quelconque de chaque suite donne la somme des termes de la suite précédente. On trouve en faisant successivement $m=1, =2, =3$, etc.,

$$S\frac{x+1}{1}=1+2+3+4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{x+1}{1}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)}{1.2}$$
$$S\frac{(x+1)(x+2)}{1.2}=1+3+6+10+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(x+1)(x+2)}{1.2}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}$$
$$S\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}=1+4+10+20+\ldots\ldots+\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3}$$
$$=\frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1.2.3.4}$$

etc.

La constante est nulle lorsque les suites doivent commencer par l'unité.

544. La formule du n° 537 donne de la même manière

$$S\frac{1}{(a+x)(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)}=$$
$$-\frac{1}{m\Delta x}\cdot\frac{1}{(a+x+\Delta x)(a+x+2\Delta x)\ldots\ldots(a+x+m\Delta x)}+const.,$$

et cette formule servira à sommer les suites dont les termes ont l'unité pour numérateur, et pour dénominateurs les nombres figurés. Le terme général de ces suites est

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots m}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+m)};$$

et la formule précédente donne

$$S\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots m}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+m)}$$
$$=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots m}{(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+m)}+const.$$

Cette formule est en défaut lorsque $m=1$. En supposant $m=2$, $=3$, $=4$, etc., et déterminant la constante de manière que les séries commencent par l'unité, elle donne

$$S\frac{1.2}{(x+1)(x+2)}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.2}{(x+1)(x+2)}=\frac{2}{1}-\frac{1.2}{(x+2)}$$
$$S\frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{3}{2}+\frac{1.2.3}{(x+2)(x+3)}$$
$$S\frac{1.2.3.4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1.2.3.4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{4}{3}-\frac{1.2.3.4}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

etc.

Les valeurs $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, etc., de la constante donnent les valeurs des séries correspondantes quand on les suppose prolongées à l'infini.

545. Quant aux fonctions transcendantes, on déduit de l'expression de Σa^x du n° 538,

$$Sa^x = \frac{a^{x+\Delta x}}{a^{\Delta x}-1} + const.$$

546. Les expressions de $\Sigma \sin. x$ et $\Sigma \cos. x$ du n° 539 donnent

$$S \sin. x = -\frac{\cos.\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}\Delta x} + const.,$$

$$S \cos. x = \frac{\sin.\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}\Delta x} + const.$$

Ces formules donnent la somme d'une suite de termes formés de sinus ou cosinus d'arcs croissants en progression par différences. On en déduit en effet, en écrivant $p+qx$ à la place de x, et $q\Delta x$ à la place de Δx,

$$S \sin. p+qx = -\frac{\cos.\left(p+qx+\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x} + \frac{\cos.\left(p-\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x},$$

$$S \cos. p+qx = \frac{\sin.\left(p+qx+\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x} - \frac{\sin.\left(p-\frac{1}{2}q\Delta x\right)}{2\sin.\frac{1}{2}q\Delta x}.$$

la constante étant déterminée de manière que les séries commencent respectivement par les termes sin. p et cos. p.

Intégration des équations aux différences finies, linéaires et à coefficients constants.

547. Considérons, comme dans les articles précédents, une variable indépendante x, et une fonction y de cette variable. La variation de x est la constante Δx, qui est toujours connue. Une équation aux différences finies exprime en général une relation entre la variable x, la fonction y, et un certain nombre des différences Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc., de cette fonction.

On voit d'ailleurs sur-le-champ qu'en mettant à la place de Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc., les expressions générales du n° 523, la relation dont il s'agit se trouvera donnée entre x, y_0, y_1, y_2, y_3, etc., l'indice du terme le plus éloigné dans la série des valeurs de y étant égal à l'ordre le plus élevé des différences contenues dans l'équation proposée. D'où l'on voit qu'une équation aux différences finies n'est autre chose qu'une relation entre un certain nombre de termes consécutifs d'une série, par le moyen de laquelle on peut déterminer tous les termes de cette série, après en avoir pris arbitrairement un nombre égal à l'ordre de l'équation.

Intégrer une équation aux différences finies, c'est trouver l'expression du terme général de la série dont on vient de parler. Il résulte de ce qui précède que cette expression doit nécessairement contenir un nombre de constantes arbitraires égal à l'ordre le plus élevé des différences qui se trouvent dans l'équation, ou à l'indice le plus élevé des valeurs successives de la fonction y qui y sont contenues.

548. Le cas le plus simple est celui où l'équation proposée se réduit à

$$\Delta^n y = 0,$$

laquelle, d'après la formule citée du n° 523, revient à

$$y_n - n.y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} y_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} y_{n-3} + \ldots\ldots \pm y_0 = 0,$$

et d'où l'on tire

$$y_n = n.y_{n-1} - \frac{n(n-1)}{2} y_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} y_{n-3} - \ldots\ldots \mp y_0.$$

Le terme de la série affecté de l'indice n est donné ici par la somme de n termes précédents, multipliés chacun par des coefficients numériques dépendants de cet indice.

L'intégration de l'équation $\Delta^n y = 0$ s'effectuera d'ailleurs d'après ce qu'on a vu dans le n° 535. On aura

$$\Delta^{n-1} y = \Sigma^1 0 = A_1$$

$$\Delta^{n-2} y = \Sigma^2 0 = \frac{A_1 x}{\Delta x} + A_2$$

$$\Delta^{n-3} y = \Sigma^3 0 = \frac{A_1 x^2}{2(\Delta x)^2} - \frac{(A_1 - 2A_2)x}{2\Delta x} + A_3,$$

A_1, A_2, A_3, etc., étant des constantes arbitraires; et en général l'intégrale de l'ordre n sera

$$y = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1},$$

α, α_1, α_2, α_3, ... α_{n-1} étant des coefficients constants arbitraires, dont le nombre est égal à l'ordre de l'équation.

549. Considérons maintenant l'équation

$$y_{x+n} + Py_{x+n-1} + Qy_{x+n-2} + Ry_{x+n-3} + \ldots\ldots + Uy_x = 0, \ldots\ldots (m)$$

dans laquelle P, Q, R,.....U désignent des nombres constants. Si nous posons $y_x = \rho^x$, ρ désignant une constante, tous les termes, après la substitution de cette valeur, seront divisibles par ρ^x, et il restera

$$\rho^n + P\rho^{n-1} + Q\rho^{n-2} + R\rho^{n-3} + \ldots\ldots + U = 0, \qquad (n)$$

en sorte que l'expression $y_x = \rho^x$ satisfera à l'équation proposée (m), pourvu que ρ soit l'une quelconque des racines de l'équation (n).

En représentant donc par $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots\ldots \rho_n$ les n racines de l'équation (n), que nous supposons d'abord toutes réelles et inégales, nous aurons pour y les n valeurs particulières $y = \rho_1^x, y = \rho_2^x, y = \rho_3^x, \ldots\ldots y = \rho_n^x$; et puisque l'équation (n) serait également satisfaite par la somme de deux, ou d'un nombre quelconque de ces valeurs, l'on aura

$$y_x = A_1\rho_1^x + A_2\rho_2^x + A_3\rho_3^x + \ldots\ldots + A_n\rho_n^x$$

pour l'expression de l'intégrale générale de cette équation; $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ étant les n constantes arbitraires qui doivent entrer dans cette intégrale.

550. Dans le cas où l'équation (n) a des racines imaginaires, soient

$$\rho^2 - 2k\rho\cos.\varphi + k^2 \quad \text{et} \quad \rho = k(\cos.\varphi \pm \sqrt{-1}\sin.\varphi)$$

un des facteurs réels du second degré de son premier membre, et les deux racines imaginaires correspondantes. On re-

connaîtra, par le n° 117, que l'équation (m) est satisfaite par les deux valeurs particulières

$$y = k^x \cos.\varphi x + \sqrt{-1}\sin.\varphi x) \quad \text{et} \quad y = k^x \cos.\varphi x - \sqrt{-1}\sin.\varphi x),$$

et, par conséquent, par la somme de ces valeurs, multipliées chacune par un coefficient constant quelconque. D'où l'on conclut que la partie de l'expression générale de la fonction y correspondante aux deux racines imaginaires dont il s'agit est, sous forme réelle,

$$B_1 k^x \cos.\varphi x + B_2 k^x \sin.\varphi x,$$

B_1 et B_2 étant des constantes arbitraires.

551. Le cas où l'équation (n) a des racines égales se résout d'une manière semblable à ce qu'on a vu dans le n° 440. Si l'on représentait par ρ_1 et $\rho_1 + \omega$ deux des racines de cette équation, qu'on rendra égales en posant $\omega = 0$, la somme des valeurs particulières correspondantes serait

$$A_1\rho_1^x + A_2(\rho_1 + \omega)^x;$$

ou, en développant la puissance indiquée,

$$(A_1 + A_2)\rho_1^x + A_2\omega \,.\, x\rho_1^{x-1} + A_2\omega^2 \frac{x(x-1)}{2}\rho_1^{x-2} + \text{etc.}$$

Or, on peut donner à A_1 et A_2 des valeurs telles que les quantités $A_1 + A_2$ et $A_2\omega$ restent des constantes finies arbitraires B_1, B_2, quel que soit ω, tandis que les coefficients suivants $A_2\omega^2$, etc., deviendront infiniment petits, lorsque l'on supposera la valeur de ω infiniment petite: cela étant, faites $\omega = 0$, et l'expression précédente va se réduire à

$$B_1\rho_1^x + B_2 x\rho_1^{x-1}.$$

Dans le cas d'une troisième racine égale à ρ_1, on suppo-

sera de même que cette racine était d'abord $\rho_1 + \omega$ et que ω s'évanouit : la somme des trois valeurs particulières correspondantes à la racine double ρ_1 et à la racine $\rho_1 + \omega$ sera

$$A_1\rho_1^x + A_2 x\rho_1^{x-1} + A_3(\rho_1 + \omega)^x,$$

ou

$$(A_1 + A_3)\rho_1^x + (A_2 + A_3\omega)x\rho_1^{x-1} + A_3\omega^2\frac{x(x-1)}{2}\rho_1^{x-2} + \text{etc.}$$

Et comme l'on peut attribuer aux constantes A_1, A_2, A_3 des valeurs telles que les quantités $A_1 + A_3, A_2 + A_3\omega, A_3\omega^2$ restent des constantes finies arbitraires, quel que soit ω, tandis que les coefficients suivants s'évanouiront avec ω, la somme des trois valeurs particulières dont il s'agit prend, pour $\omega = 0$, la forme

$$B_1\rho_1^x + B_2 x\rho_1^{x-1} + B_3\frac{x(x-1)}{2}\rho_1^{x-2}.$$

Et ainsi de suite dans le cas où il y aurait un plus grand nombre de racines égales entre elles.

552. Les constantes arbitraires introduites dans l'intégrale générale, se détermineront toujours d'après la condition que cette intégrale reproduise n valeurs données de la fonction y, correspondantes à n valeurs également données de la variable x.

XLI. FORMULES D'INTERPOLATION.

553. L'opération désignée sous le nom d'*interpolation* est une des applications principales du calcul des différences finies. Elle est fondée sur cette notion, qu'à défaut de l'expression analytique d'une fonction qui en fait connaître complétement la nature, et qui permet d'en calculer exactement,

ou d'une manière aussi approchée qu'on le veut, la valeur correspondante à une valeur quelconque de la variable, on peut connaître, avec un degré d'exactitude qui suffit aux applications, toutes les valeurs de la fonction dont il s'agit lorsqu'on connaît un nombre limité de valeurs données de cette fonction. C'est ainsi que dans les constructions graphiques, on regarde la figure d'une courbe comme étant déterminée par un certain nombre de points donnés appartenant à cette courbe.

Reprenons la formule du n° 522

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots\ldots + \Delta^n u_0.$$

Cette formule établit simplement une relation entre la valeur u_n, la valeur u_0, et les différences $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \ldots\ldots \Delta^n u_0$; ou, ce qui revient au même, entre les valeurs $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n$ qui sont censées connues. On ne peut, à parler rigoureusement, en tirer rien qui ne soit déjà donné.

Considérons u comme une fonction de la variable x seule, et admettons que cette variable croisse par la différence constante Δx. Si nous écrivons u_x pour représenter la valeur que reçoit la fonction u quand on donne à la variable une valeur désignée par x, nous devrons, en remplaçant dans la formule précédente u_n par u_x, remplacer n par $\frac{x}{\Delta x}$. Elle s'écrira

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x}\Delta u_0 + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}$$

$$+ \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots + \Delta^{\frac{x}{\Delta x}} u_0.$$

554. Si la fonction u était une fonction rationnelle et en-

tière de x de l'ordre r, la différence $\Delta^r u_0$ serait constante, et par conséquent les différences des ordres suivants seraient nulles, comme on l'a vu n° 527. L'expression précédente aurait donc un nombre déterminé de termes; en sorte que la connaissance des $r+1$ premières valeurs de u suffirait pour continuer indéfiniment la série, et donner des nombres exacts. Cela se voit aussi en remarquant que si l'on fait $\Delta^n u = 0$ dans l'équation du n° 523, on en tire

$$u_n = n.u_{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-3} - \ldots\ldots \mp u_0,$$

formule qui donne un terme quelconque de la suite u_0, u_1, u_2, etc., au moyen des n termes précédents. Cette circonstance n'a pas lieu en général; mais si les différences successives $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0$, etc., ont des valeurs décroissantes, comme cela arrive dans les cas auxquels s'appliquent les méthodes dont il s'agit, on pourra supprimer les termes qui seront assez petits pour ne pas influer sur la valeur des résultats, eu égard au degré d'exactitude avec lequel les nombres sont calculés. La formule précédente pourra servir alors à prolonger la série; mais on conçoit qu'à mesure que l'on s'éloignera davantage des nombres donnés, on sera exposé à commettre des erreurs de plus en plus grandes.

Il importe de remarquer d'ailleurs que dans les cas où les différences d'un certain ordre r sont constantes, ou peuvent être supposées constantes, le calcul des termes de la suite u_0, u_1, u_2, etc., qui dépassent le terme u_r, n'exige plus que de simples additions. Soit par exemple la fonction

$$u_x = x^3 - 5x^2 + 6x - 1,$$

et supposons $\Delta x = 1$. On calculera les quatre premiers termes,

correspondants aux valeurs $x=0, x=1, x=2, x=3$, et l'on formera le tableau suivant

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
0	-1			
1	$+1$	$+2$		
2	-1	-2	-4	
3	-1	0	$+2$	$+6$

La nature de la fonction proposée, indiquant que les différences troisièmes sont constantes, on voit que l'on pourrait continuer la série des valeurs de u_x par la formule

$$u_x = u_0 + x\Delta u_0 + x(x-1)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + x(x-1)(x-2)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3},$$

dans laquelle on ferait $u_0=-1$, $\Delta u_0=2$, $\Delta^2 u_0=-4$, $\Delta^3 u_0=6$. Mais il est beaucoup plus simple de prolonger le tableau en écrivant la différence constante 6 dans la dernière colonne à droite, et formant par addition les colonnes en revenant de droite à gauche.

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
3	-1	0	2	6
4	$+7$	3	8	6
5	29	22	14	6
6	71	42	20	6
etc.				

Les résultats que l'on obtient ici sont entièrement exacts. Mais il n'en serait pas de même si les différences du dernier ordre que l'on considère n'étaient pas rigoureusement constantes. Il faudrait alors calculer d'avance quelques termes éloignés de la série, et s'assurer que ces termes sont reproduits par le mode de calcul qui vient d'être indiqué.

555. L'objet de l'interpolation consiste d'ailleurs, non pas à prolonger indéfiniment une série de termes dont un certain nombre sont donnés, mais à calculer les termes intermédiaires dans une série dont un certain nombre de termes sont déterminés de distance en distance. Quoique la formule du n° 553 n'exprime, à proprement parler, que des relations entre les valeurs de u qui répondent aux valeurs déterminées $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, etc., de la variable x, on la regarde comme exprimant en fonction de x les valeurs de u, qui répondent à des valeurs quelconques de cette variable comprises entre les précédentes. Si l'on attribue à x une valeur moindre que Δx, l'expression de u_x sera, dans la plupart des cas, très-convergente, et donnera facilement une valeur fort approchée de cette quantité.

D'après ces notions, le calcul des tables, telles que les tables de logarithmes ou les tables astronomiques, peut être réduit à calculer exactement en premier lieu, au moyen de l'expression analytique des fonctions, un petit nombre de termes à intervalles éloignés; et en second lieu, à former les termes intermédiaires par de simples additions. Nous avons supposé ci-dessus l'accroissement Δx constant. Admettons qu'entre deux quelconques des termes connus u_0, u_1, u_2, u_3, etc., qui répondent aux valeurs $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, etc., de la variable x, on veuille *interpoler* un nombre $m-1$ de termes distribués à intervalles égaux. Soit $\delta x = \frac{\Delta x}{m}$ le nouvel

incrément de x. Il est évident, d'après ce que l'on a vu dans le numéro précédent, que l'on formera facilement les termes intermédiaires demandés, si l'on connaît $u_0, \delta u_0, \delta^2 u_0, \delta^3 u_0$, etc., et si l'on peut supposer constantes les différences d'un certain ordre marquées par $\delta^r u_0$; puisque l'on aura alors la dernière colonne d'un tableau semblable à celui qui a été donné pour exemple, et les premiers termes de toutes les autres colonnes. Or, si l'on regarde, d'après ce qui a été dit ci-dessus, la formule du n° 553, comme devant donner les valeurs de u correspondantes aux valeurs intermédiaires de x, cette formule donnera d'abord, en écrivant $m\delta x$ au lieu de Δx,

$$u_x = u_0 + \frac{x}{m\delta x}\Delta u_0 + \frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}$$
$$+ \frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} + \text{etc.},$$

expression dans laquelle $u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0$, etc., doivent être regardées comme des quantités constantes et connues par le calcul préliminaire qui a été fait des termes de la suite qui répondent aux valeurs $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, etc. En différentiant ensuite par rapport au signe δ, et remarquant que les produits

$$\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\ldots$$

formant une fonction rationnelle et entière de x, leurs différences des ordres inférieurs à l'ordre marqué par le nombre des facteurs sont nulles, on trouvera

$$\delta^r u_x =$$

$$\left[\begin{array}{l} \delta^r\left\{\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{m\delta x}-(r-1)\right)\right\}\cdot\frac{\Delta^r u_0}{1.2.3\ldots r} \\ +\delta^r\left\{\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{m\delta x}-r\right)\right\}\cdot\frac{\Delta^{r+1} u_0}{1.2.3\ldots(r+1)} \\ +\delta^r\left\{\frac{x}{m\delta x}\left(\frac{x}{m\delta x}-1\right)\left(\frac{x}{m\delta x}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{m\delta x}-(r+1)\right)\right\}\cdot\frac{\Delta^{r+2} u_0}{1.2.3\ldots(r+2)} \\ +\text{etc.} \end{array}\right]$$

Cette expression donnera les différences cherchées δu_0, $\delta^2 u_0$, $\delta^3 u_0$, en y faisant $x=0$ après que les différentiations indiquées auront été effectuées. Les formules dont il s'agit pouvant être employées utilement dans les applications, nous donnerons les expressions des différences des premiers ordres.

En développant les produits indiqués, on trouve facilement en premier lieu

$$\delta u_x = \left[\begin{array}{l} \delta\frac{x}{m\delta x}\Delta u_0 \\ +\delta\left(\frac{x^2}{m^2(\delta x)^2}-\frac{x}{m\delta x}\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} \\ +\delta\left(\frac{x^3}{m^3(\delta x)^3}-3\frac{x^2}{m^2(\delta x)^2}+2\frac{x}{m\delta x}\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\ +\delta\left(\frac{x^4}{m^4(\delta x)^4}-6\frac{x^3}{m^3(\delta x)^3}+11\frac{x^2}{m^2(\delta x)^2}-6\frac{x}{m\delta x}\right)\frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \end{array}\right]$$

$$\delta^2 u_x = \left[\begin{array}{l} \delta^2\frac{x^2}{m^2(\delta x)^2}\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} \\ +\delta^2\left(\frac{x^3}{m^3(\delta x)^3}-3\frac{x^2}{m^2(\delta x)^2}\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\ +\delta^2\left(\frac{x^4}{m^4(\delta x)^4}-6\frac{x^3}{m^3(\delta x)^3}+11\frac{x^2}{m^2(\delta x)^2}\right)\frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \end{array}\right]$$

$$\delta^3 u_x = \left[\begin{array}{l} \delta^3 \dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3} \dfrac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\ + \delta^3 \left(\dfrac{x^4}{m^4(\delta x)^4} - 6 \dfrac{x^3}{m^3(\delta x)^3} \right) \dfrac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \end{array} \right]$$

$$\delta^4 u_x = \delta^4 \frac{x^4}{m^4(\delta x)^4} \frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4}$$

etc.....

En employant ensuite l'expression de $\Delta^n . x^k$ du n° 528, dans laquelle il faudra faire $x = 0$, ce qui la réduit à son dernier terme, ces formules deviennent

$$\delta u_0 = \frac{1}{m} \left[\Delta u_0 + \frac{1-m}{2.m} \Delta^2 u_0 + \frac{1-3m+2m^2}{2.3.m^2} \Delta^3 u_0 \right.$$
$$\left. + \frac{1-6m+11m^2-6m^3}{2.3.4.m^3} \Delta^4 u_0 + \text{etc.} \right]$$

$$\delta^2 u_0 = \frac{1}{m^2} \left[\Delta^2 u_0 + \frac{1-m}{m} \Delta^3 u_0 + \frac{7-18m+11m^2}{3.4.m^2} \Delta^4 u_0 + \text{etc.} \right]$$

$$\delta^3 u_0 = \frac{1}{m^3} \left[\Delta^3 u_0 + \frac{3-3m}{2.m} \Delta^4 u_0 + \text{etc.} \right]$$

$$\delta^4 u_0 \frac{1}{m^4} \left[\Delta^4 u_0 + \text{etc.} \right]$$

etc.....

Il est rare que l'on soit dans le cas d'employer des différences d'un ordre plus élevé que le quatrième. On voit d'ailleurs que si l'on s'arrête aux différences de l'ordre r des nombres u_0, u_1, u_2, etc., de la série proposée, c'est-à-dire si l'on regarde la différence $\Delta^r u_x$ comme étant constante, il en résulte la conséquence que la différence du même ordre $\delta^r u_x$ des nombres qu'il s'agit d'interpoler entre les précédents est également constante et égale à $\frac{\Delta^r u_x}{m^r}$, $m-1$ étant le

nombre des termes insérés entre deux termes consécutifs de la suite proposée. Les résultats précédents donneront toujours les moyens d'interpoler une suite de nombres placés à intervalles égaux entre les termes d'une suite donnée qui sont également placés à intervalles égaux.

556. Pour donner un exemple de l'usage de ces procédés, on déterminera les valeurs de la fonction

$$u_x = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$$

considérée n° 554, qui répondent aux valeurs de x, croissant par dixièmes de l'unité. Nous avons donc ici

$$\begin{aligned} u_0 &= -1 \\ \Delta u_0 &= 2 \\ \Delta^2 u_0 &= -4 \\ \Delta^3 u_0 &= 6 \end{aligned}$$

et les différences des ordres supérieurs sont nulles.

Mettant ces valeurs dans les formules précédentes, où l'on fera $m = 10$, il viendra

$$\delta u_0 = \frac{1}{10}\left[2 + \frac{-9}{20}(-4) + \frac{1-30+200}{600}6\right] = 0{,}551$$

$$\delta^2 u_0 = \frac{1}{100}\left[-4 + \frac{-9}{10}6\right] = -0{,}094$$

$$\delta^3 u_0 = \frac{1}{1000}6 = 0{,}006$$

Ainsi, le calcul des valeurs intermédiaires demandées, s'opérera de la manière suivante :

x	u_x	δu_x	$\delta^2 u_x$	$\delta^3 u_x$
0	—1,000			
0,1	—0,449	0,551		
0,2	+0,008	0,457	—0,094	
0,3	0,377	0,369	—0,088	0,006
0,4	0,664	0,287	—0,082	6
0,5	0,875	0,211	—0,076	6
0,6	1,016	0,141	—0,070	6
0,7	1,093	0,077	—0,064	6
0,8	1,112	0,019	—0,058	6
0,9	1,079	—0,033	—0,052	6
1,0	1,000	—0,079	—0,046	6
1,1	0,881	—0,119	—0,040	6
etc.				

On peut voir, dans le *Précis* qui est au devant des *Tables de Logarithmes* de Callet, page 64, les précautions qu'exigent les calculs de ce genre et la manière de corriger les petites erreurs auxquelles ils peuvent donner lieu lorsque les valeurs des différences ne sont qu'approchées.

557. L'usage des tables de logarithmes ou des autres tables du même genre, donne lieu à une application continuelle du procédé de l'interpolation. L'emploi des *parties proportionnelles* se déduit immédiatement du procédé qui vient d'être exposé en supposant les différences du second ordre nulles, et réduisant l'expression de u_x, écrite n° 554, à

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x} \Delta u_0.$$

Si les différences du second ordre ne sont pas nulles, on aura donc un résultat plus exact en employant les trois premiers termes

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x}\Delta u_0 + \frac{x(x-\Delta x)}{\Delta x^2}\,\frac{\Delta^2 u_0}{2}.$$

Cet usage des tables donne lieu aussi à la question inverse du problème de l'interpolation, c'est-à-dire à la recherche de la valeur de x, qui répond à la valeur donnée u_x de la fonction u. Quand on peut supposer nulles les différences des ordres supérieurs, la première des équations précédentes donne

$$x = \Delta x\,\frac{u_x - u_0}{\Delta u_0}.$$

Si cette formule ne présentait pas l'exactitude nécessaire, il faudrait écrire

$$x = \Delta x\,\frac{u_x - u_0}{\Delta u_0}\cdot\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2\,\Delta u_0} + \text{etc.}}.$$

Après avoir calculé une première valeur approchée de x, au moyen de l'expression $\Delta x\,\frac{u_x - u_0}{\Delta u_0}$, on la substituerait dans le second membre pour obtenir un résultat plus exact. Cette seconde valeur de x pourrait être substituée de nouveau pour obtenir un résultat plus exact encore.

558. Nous avons supposé, dans le n° 554 et les suivants, que la variable x croissait par différences constantes, ou que les nombres de la suite proposée étaient distribués à intervalles égaux. On peut encore, dans les cas où cette condi-

tion n'aurait pas lieu, établir une formule d'interpolation analogue à l'expression de u_x du n° 554. Remarquons qu'en mettant dans cette expression pour $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0$, etc., les valeurs écrites n° 523, elle devient

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x}(u_1 - u_0) + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{1.2}$$
$$+ \left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right)\frac{u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0}{1.2.3} + \text{etc.}$$

ou bien

$$u_x =$$
$$\left[\begin{array}{l}
u_0\left\{1 - \frac{x}{\Delta x} + \frac{1}{1.2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right) - \frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right) + \text{etc.}\right\} \\
+u_1\left\{\frac{x}{\Delta x} - \frac{1}{1.2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right) + \frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right) - \text{etc.}\right\} \\
+u_2\left\{\frac{1}{1.2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right) - \frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right) + \text{etc.}\right\} \\
+u_3\left\{\frac{1}{1.2.3}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right) - \text{etc.}\right\} \\
+\text{etc.}
\end{array}\right]$$

En faisant $x = 0$, cette équation se réduit à $u_x = u_0$; en faisant $x = \Delta x$, elle se réduit à $u_x = u_1$; en faisant $x = 2\Delta x$, elle se réduit à $u_x = u_2$; en faisant $x = 3\Delta x$, elle se réduit à $u_x = u_3$; et ainsi de suite. La nature de l'expression consiste donc en ce qu'elle est formée des termes successifs u_0, u_1, u_2, u_3, etc., ayant pour coefficients des fonctions rationnelles et entières de la variable x, qui ont la propriété de se réduire à l'unité quand on donne à x la valeur correspondante au terme auquel appartient la fonction, et de se réduire à zéro quand on donne à x une valeur correspondante à tout autre terme.

Représentons en général par x_0, x_1, x_2, x_3, etc., les valeurs de x qui, substituées dans la fonction u, donnent respectivement u_0, u_1, u_2, u_3, etc. De quelque manière que croissent ces valeurs de x, on formera évidemment une expression qui présentera la même propriété que la précédente, si l'on écrit :

$$u_x = \left[\begin{array}{l} u_0 \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ +u_1 \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ +u_2 \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ +u_3 \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots}{(x_3-x_0)(x_3+x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ + \text{etc}\ldots\ldots \end{array}\right]$$

Cette formule peut servir à calculer facilement, au moyen d'un certain nombre de valeurs données de la fonction u correspondantes à des valeurs déterminées de x, une valeur quelconque intermédiaire entre celles-ci. On vérifie, d'ailleurs, qu'en supposant les valeurs x_0, x_1, x_2, x_3, etc., croissant en progression arithmétique, cette dernière formule revient à la précédente.

559. Un des principaux usages des méthodes d'interpolation consiste à établir des formules qui, étant déduites d'un certain nombre de résultats d'observation ou d'expérience, sont regardées comme exprimant, d'une manière approchée, la loi d'un phénomène. On doit remarquer que l'usage des formules de ce genre ne doit pas en général être étendu au delà des limites des résultats qui ont été obtenus. Si l'on regarde les nombres donnés par l'observation comme étant

tout à fait exacts, et si les formules cherchées doivent y satisfaire, on peut employer les procédés qui viennent d'être exposés. On peut aussi tâcher de satisfaire à ces nombres par d'autres expressions plus appropriées à la nature du phénomène. Mais le plus souvent les résultats numériques sont affectés d'erreurs, et il ne conviendrait pas de s'attacher à construire des formules qui s'accordassent exactement avec tous. On cherche alors à remplacer d'abord ces résultats par une suite régulière, ce qui peut se faire soit au moyen d'une construction graphique, soit en altérant les nombres de manière à rendre progressive la marche de leurs différences de divers ordres. Une semblable altération est toujours plus ou moins arbitraire, et devrait être dirigée d'après des principes qui dépendent de la théorie des probabilités.

Approximation des quadratures.

560. Les calculs numériques qu'il est nécessaire d'effectuer pour les rectifications, les quadratures, les cubatures, la détermination des centres de gravité, celle des centres d'inertie, etc., peuvent toujours être réduits à évaluer des intégrales définies telles que

$$\int_a^b dx \,.\, u,$$

u désignant une fonction de x, et a, b les limites de l'intégrale. Lorsque cette évaluation ne peut être effectuée directement, on emploie divers procédés d'approximation dont les plus remarquables consistent à déduire la valeur de l'intégrale de la seule connaissance d'un certain nombre de valeurs de la fonction u.

Supposons toujours que la variable x varie par la différence constante Δx, et reprenons l'expression de u_x du n° 554,

$$u_x = u_0 + \frac{x}{\Delta x}\Delta u_0 + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}$$
$$+ \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} + \text{etc.}$$

D'après la notion sur laquelle sont fondés les procédés de l'interpolation, nous regardons cette formule comme pouvant représenter les valeurs de la fonction u, non-seulement quand on y donne à x les valeurs $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, etc., mais pour une valeur quelconque de cette variable. En multipliant donc par dx, et intégrant entre les limites a et b, nous obtiendrons la valeur de l'intégrale proposée.

L'expression précédente revient à

$$\begin{aligned}
u_x = u_0 &+ \frac{x}{\Delta x}\Delta u_0 \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - \frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 + 2\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 - 3\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 + 11\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - 6\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4} \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^5 - 10\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 + 35\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 - 50\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + 24\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^5 u_0}{1.2.3.4.5} \\
&+ \left[\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^6 - 15\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^5 + 85\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^4 - 225\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + 274\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - 120\frac{x}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^6 u_0}{1.2.3.4.5.6}
\end{aligned}$$

Multipliant par dx, et intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=\Delta x$, il viendra

$$\int_0^{\Delta x} dx \,.\, u = \Delta x\Big[u_0 + \frac{1}{2}\Delta u_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 u_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 u_0 - \frac{19}{720}\Delta^4 u_0 + \frac{3}{160}\Delta^5 u_0 - \frac{863}{60480}\Delta^6 u_0 + \text{etc.}\Big]$$

pour l'expression de la valeur de la première partie de l'intégrale proposée comprise entre les limites 0 et Δx. La même formule donnera les expressions des parties suivantes de cette intégrale en écrivant u_1, u_2, u_3, etc., à la place de u. D'où l'on conclut évidemment

$$\int_0^{n\Delta x} dx \,.\, u = \Delta x \left[\begin{array}{l} u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} \\ + \frac{1}{2}(\Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots\ldots\ldots + \Delta u_{n-1}) \\ - \frac{1}{12}(\Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \Delta^2 u_{n-1}) \\ + \frac{1}{24}(\Delta^3 u_0 + \Delta^3 u_1 + \Delta^3 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \Delta^3 u_{n-1}) \\ - \text{etc.} \end{array}\right];$$

et en remarquant que

$$\begin{aligned} &\Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta u_{n-1} = u_n - u_0, \\ &\Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta^2 u_{n-1} = \Delta u_n - \Delta u_0, \\ &\Delta^3 u_0 + \Delta^3 u_1 + \Delta^3 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \Delta^3 u_{n-1} = \Delta^2 u_n - \Delta^2 u_0, \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

on changera l'expression précédente en

$$\int_0^{n\Delta x} dx \,.\, u =$$

$$\Delta x \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} u_0 + u_1 + u_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} + \frac{1}{2} u_n \\ - \frac{1}{12}(\Delta u_n - \Delta u_0) + \frac{1}{24}(\Delta^2 u_n - \Delta^2 u_0) - \frac{19}{720}(\Delta^3 u_n - \Delta^3 u_0) \\ + \frac{3}{160}(\Delta^4 u_n - \Delta^4 u_0) - \frac{863}{60480}(\Delta^5 u_n - \Delta^5 u_0) + \text{etc.} \end{array} \right].$$

Au moyen de cette formule on peut calculer la valeur de l'intégrale $\int dx \,.\, u$, entre des limites données, en partageant l'intervalle de ces limites en un nombre n de parties égales chacune à Δx, et déterminant les valeurs $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n$ de la faction u, qui répondent aux points de division. Une première valeur approchée est donnée par le premier terme seul

$$\Delta x \,.\left(\frac{1}{2} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} + \frac{1}{2} u_n\right).$$

Les termes suivants sont la correction de cette valeur. Le résultat sera d'autant plus exact, que le nombre n étant plus grand, les différences qui composent les termes de correction sont plus petites.

561. La formule précédente ne pourrait être utilement employée qu'autant que les différences des ordres successifs décroîtraient très-rapidement. On peut en obtenir une autre qui donnera une approximation plus prompte. Reprenons l'expression de u_x du numéro précédent, et après avoir multiplié par dx, intégrons depuis $x=0$ jusqu'à $x=2\Delta x$. Il viendra

$$\int_0^{2\Delta x} dx \,.\, u = \Delta x \Big[2u_0 + 2\Delta u_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 u_0 - \frac{1}{90}\Delta^4 u_0 + \frac{1}{90}\Delta^5 u_0 + \frac{37}{3780}\Delta^6 u_0 + \text{etc.} \Big]$$

ou, en faisant attention que, $\Delta u_0 = u_1 - u_0$, $\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0$,

$$\int_0^{2\Delta x} dx \,.\, u = \Delta x \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3}u_0 + \frac{4}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 \\ -\frac{1}{90}\Delta^4 u_0 + \frac{1}{90}\Delta^5 u_0 - \frac{37}{3780}\Delta^6 u_0 + \text{etc.} \end{array} \right]$$

pour l'expression d'une première partie de l'intégrale comprise entre les limites 0 et $2\Delta x$. En ajoutant les expressions analogues pour les parties suivantes comprises entre $2\Delta x$ et $4\Delta x$, $4\Delta x$ et $6\Delta x$, etc., on aura donc, n étant un nombre pair,

$$\int_0^{n\Delta x} dx \,.\, u =$$

$$\frac{\Delta x}{3} \left[\begin{array}{l} u_0 + 4u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 2u_4 + 4u_5 + \ldots\ldots + 2u_{n-2} + 4u_{n-1} + u_n \\ -\frac{1}{30}(\Delta^4 u_0 + \Delta^4 u_2 + \Delta^4 u_4 + \ldots\ldots + \Delta^4 u_{n-6} + \Delta^4 u_{n-4} + \Delta^4 u_{n-2}) \\ +\frac{1}{30}(\Delta^5 u_0 + \Delta^5 u_2 + \Delta^5 u_4 + \ldots\ldots + \Delta^5 u_{n-6} + \Delta^5 u_{n-4} + \Delta^5 u_{n-2}) \\ -\frac{37}{1260}(\Delta^6 u_0 + \Delta^6 u_2 + \Delta^6 u_4 + \ldots\ldots + \Delta^6 u_{n-6} + \Delta^6 u_{n-4} + \Delta^6 u_{n-2}) \\ + \text{etc.} \end{array} \right]$$

La première ligne est le résultat que l'on obtient en concevant dans l'intervalle compris entre 0 et $2\Delta x$, la courbe dont l'ordonnée est u, remplacée par un arc de parabole passant par les extrémités des trois ordonnées u_0, u_1, u_2;

et de même pour les autres intervalles. Les termes suivants sont la correction de cette même première valeur, qui est déjà très-approchée.

On peut remarquer que l'usage des formules précédentes exige la connaissance des valeurs u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, etc., de la fonction u, qui sont placées au delà des limites de l'intégrale définie. Si la fonction u est donnée dans toute son étendue, cette circonstance n'entraîne aucune difficulté. Mais il n'en serait pas de même si, comme cela arrive quelquefois, cette fonction n'était donnée que dans les limites de l'intégrale définie. Nous observerons à cet égard que l'esprit des méthodes d'interpolation consiste alors à regarder la fonction proposée comme entièrement définie par les valeurs particulières $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$. La différence de l'ordre le plus élevé que l'on puisse calculer au moyen de ces valeurs, est $\Delta_n u_0$. On doit donc supposer cette différence constante, et déterminer en conséquence les termes qui entrent dans les formules dont il s'agit.

XLII. LIGNES DE NIVEAU ET DE PLUS GRANDE PENTE SUR UNE SURFACE.

562. Nous concevons les points d'une surface rapportés à trois coordonnées rectangulaires x, y, z. Les abscisses x, y sont horizontales; l'ordonnée z est verticale. La figure de la surface est donnée par l'équation

$$z = f(x, y).$$

Admettons que les abscisses x, y reçoivent chacune des accroissements infiniment petits dx, dy; l'ordonnée z pren-

dra également un accroissement infiniment petit, représenté par

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

$\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ étant respectivement les coefficients différentiels de la fonction $f(x,y)$, pris par rapport à x et à y. La valeur de dz dépend du rapport que l'on a établi entre les variations arbitraires dx et dy. Si ce rapport est tel que $dz = 0$, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}},$$

on passera d'un point à un autre de la surface sans que l'ordonnée z change de valeur. L'équation précédente est donc l'équation différentielle de la projection sur le plan des xy de la *ligne de niveau*, passant par le point de la surface, dont les coordonnées sont représentées par x, y, z.

On obtient l'équation en termes finis de cette projection en attribuant à z, dans l'équation $z = f(x,y)$, une valeur constante égale à l'ordonnée du point par lequel on veut faire passer la ligne de niveau.

563. En passant du point de la surface, dont les coordonnées sont x, y, z, au point dont les coordonnées sont $x + dx, y + dy, z + dz$, on parcourt, dans le plan horizontal des xy, un espace $dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$; et on s'élève verticalement de l'espace dz. La *pente* de la ligne parcourue sur la surface, c'est-à-dire la différence de niveau de ses deux

points extrêmes, divisée par sa projection horizontale, est donc exprimée par

$$\frac{\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy}{dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

La grandeur de cette pente variera avec le rapport arbitraire $\frac{dy}{dx}$. Si l'on veut connaître la direction de la plus grande pente, on égalera à zéro la différentielle de l'expression précédente, prise par rapport à $\frac{dy}{dx}$, ce qui donnera

$$\frac{dz}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dy}}{\frac{dz}{dx}}$$

pour l'équation différentielle de la projection horizontale de la *ligne de plus grande pente*. On voit que, pour un point quelconque de la surface, les projections horizontales des lignes de niveau et de plus grande pente qui se croisent en ce point, et par conséquent ces lignes elle-mêmes, sont toujours perpendiculaires l'une sur l'autre, résultat dont il est aisé de s'assurer directement.

564. La considération des lignes de niveau et de plus grande pente s'applique à la représentation graphique de la surface de la terre, au tracé des routes et à la conduite des eaux. On reconnaît que cette surface présente des pentes alternatives en sens opposés, sur lesquelles se trouvent des systèmes de lignes de plus grande pente,

séparés par des lignes de moindre pente, désignées par les noms de *faites* et de *thalwegs*, qui sont autant d'asymptotes des lignes de plus grande pente ordinaires. Quand on parcourt une même ligne de niveau, les points où elle est coupée par les lignes de faîtes ou de thalwegs sont toujours ceux où la pente est un minimum. Il existe des points remarquables où les lignes de faîtes et de thalwegs se croisent à angles droits, et dans lesquels la hauteur verticale de la surface est un maximum ou un minimum absolu ou relatif. Les derniers de ces points indiquent les lieux où l'on doit diriger le tracé des routes ou des canaux lorsqu'il s'agit de franchir une chaîne de montagnes.

XLIII. DE LA COURBURE DES SURFACES.

365. La courbure d'une courbe est définie quand on détermine le rayon du cercle osculateur, c'est-à-dire du cercle qui a un contact du second ordre avec cette courbe. La courbure d'une surface est également définie en assignant le rayon du cercle osculateur de toutes les sections normales qui peuvent être faites en un point donné.

Si, suivant la normale en un point quelconque m d'une surface, on fait passer un plan, on obtiendra une courbe qui sera une *section normale* de la surface. Prenons sur la normale, à partir du point m, une distance infiniment petite δ; puis, par le point ainsi déterminé, menons un plan perpendiculaire à la normale; nous obtiendrons une courbe que nous désignerons, avec M. Ch. Dupin, par le nom d'*indicatrice*, parce que la nature de cette courbe fait connaître, comme on le verra tout à l'heure, la figure de la surface près du point m. Si d'ailleurs nous représentons par ε

l'arc infiniment petit compris entre le point m et le point où la section normale rencontre l'indicatrice, et si nous appelons ρ le rayon de courbure de cette section normale, nous aurons

$$\sigma = \rho \text{ arc. cos.}\left(1 - \frac{\delta}{\rho}\right) = \rho\sqrt{\frac{2\delta}{\rho}},$$

et par conséquent

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\delta}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Ainsi les rayons de courbure de diverses sections normales sont proportionnels aux carrés des arcs σ de ces sections, comptés du point m jusqu'à la rencontre de l'indicatrice, ou, si l'on veut, aux carrés des demi-diamètres de l'indicatrice, qui ne diffèrent des arcs qui leur correspondent, que d'une quantité infiniment petite du second ordre.

566. Cela posé, la situation du point m étant rapportée à trois axes rectangulaires par les coordonnées x, y, z, soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation de la surface proposée. Représentons par $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$ les coordonnées du point de rencontre de la section normale et de l'indicatrice; en sorte que les quantités α et β étant très-petites, on pourra négliger, dans la théorie actuelle, leurs puissances et leurs produits au delà du second ordre, par rapport aux puissances et aux produits d'un ordre inférieur. On aura, d'après la formule du n° 138,

$$\gamma = \frac{dz}{dx}\alpha + \frac{dz}{dy}\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\alpha^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}\alpha\beta + \frac{d^2z}{dy^2}\beta^2\right);$$

expression que nous ecrirons plus simplement

$$\gamma = p\alpha + q\beta + \frac{1}{2}(r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2), \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

en représentant pour abréger par p et q les coefficients différentiels du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$; et par r, s, t les coefficients différentiels du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$. On peut regarder α, β, γ comme des coordonnées comptées à partir du point m sur des axes paralleles aux axes des x, des y et des z. L'équation (b), dans une étendue très-petite autour de ce point, doit être regardée comme appartenant à la surface proposée.

De plus, l'équation du plan tangent mené par le point m à cette surface sera, d'après le n° 217,

$$\gamma = p\alpha + q\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

On en conclut que le plan de l'indicatrice, mené parallèlement au plan tangent à la distance δ, mesurée suivant la normale, ou à la distance $\delta\sqrt{p^2+q^2+1}$, mesurée suivant l'axe des z, aura pour équation

$$\gamma - \delta\sqrt{p^2+q^2+1} = p\alpha + q\beta \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Enfin, si l'on élimine γ entre les équations (b) et (d), le résultat de cette élimination, qui est

$$2\delta\sqrt{p^2+q^2+1} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2, \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

sera évidemment l'équation de la projection de l'indicatrice

sur le plan des α, β. On voit que la distance δ est infiniment petite du second ordre lorsque les quantités α et β sont infiniment petites du premier ordre.

567. Nous avons d'ailleurs

$$\sigma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

ou, en mettant pour γ sa valeur donnée par l'équation (b), et ne conservant que les quantités du second ordre par rapport à α et β,

$$\sigma^2 = (1 + p^2)\alpha^2 + 2pq\alpha\beta + (1 + q^2)\beta^2.$$

Ainsi l'expression (a) du rayon de courbure devient, en mettant pour σ^2 cette valeur, et pour 2δ la valeur qui se déduit de l'équation (e),

$$\rho = \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \,.\, \frac{(1 + p^2)\alpha^2 + 2pq\alpha\beta + (1 + q^2)\beta^2}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}. \quad . \quad (g)$$

Cette formule donnera le rayon de courbure d'une section normale quelconque lorsqu'on aura fixé le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, c'est-à-dire la projection sur le plan des xy de la tangente menée au point m à cette section normale.

568. D'une section normale à une autre, le rayon de courbure varie proportionnellement aux carrés des demi-diamètres de l'indicatrice. Cette ligne, dont la projection sur le plan des xy est donnée par l'équation (e) du second degré, est toujours disposée symétriquement par rapport au point m, et les valeurs maxima et minima du rayon de courbure correspondront évidemment à ses diamètres rectangulaires. Pour les déterminer de la manière la plus

simple, on remarquera qu'en différentiant les équations (d) et (e) auxquelles les coordonnées des points de l'indicatrice doivent toujours satisfaire, on a

$$d\gamma = pd\alpha + qd\beta,$$
$$0 = (r\alpha + s\beta)d\alpha + (s\alpha + t\beta)d\beta.$$

De plus si ρ, et par conséquent σ, doivent être un maximum ou un minimum, on a par l'équation (f)

$$0 = \alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma;$$

ou, à cause de la valeur précédente de $d\gamma$,

$$0 = (\alpha + p\gamma)d\alpha + (\beta + q\gamma)d\beta.$$

Donc

$$\frac{\alpha + p\gamma}{r\alpha + s\beta} = \frac{\beta + q\gamma}{s\alpha + t\beta} = \frac{\alpha(\alpha + p\gamma) + \beta(\beta + q\gamma)}{\alpha(r\alpha + s\beta) + \beta(s\alpha + t\beta)}.$$

Or, la dernière de ces trois quantités est précisément le second facteur de l'expression (g) du rayon de courbure ρ. Donc, si l'on représente par R la valeur maximum ou minimum de ce rayon, et si l'on fait pour abréger

$$Z = \frac{R}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

on pourra écrire

$$Z = \frac{\alpha + p\gamma}{r\alpha + s\beta} \quad \text{et} \quad Z = \frac{\beta + q\gamma}{s\alpha + t\beta},$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} Z(r\alpha + s\beta) &= (1 + p^2)\alpha + pq\beta \\ Z(s\alpha + t\beta) &= pq\alpha + (1 + q^2)\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (h)$$

Nous en déduirons d'abord en éliminant Z,

$$-[(1+p^2)s-pqr]\alpha^2+[1+q^2)r-(1+p^2)t]\alpha\beta+[(1+q^2)s-pqt]\beta^2=0,$$

équation qui donne le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, dont la valeur peut être mise sous la forme

$$\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{(1+q^2)r-(1+p^2)t}{2[(1+q^2)s-pqt]}$$
$$\pm\frac{\sqrt{[(1+q^2)r-2pqs+(1+q^2)t]^2-4(p^2+q^2+1)(rt-s^2)}}{2[(1+q^2)s-pqt]}, \qquad (i)$$

ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

Nous déduirons en second lieu des équations (h), par l'élimination de α et β,

$$(rt-s^2)Z^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]Z+p^2+q^2+1=0;$$

d'où, en se rappelant que $R=Z\sqrt{p^2+q^2+1}$,

$$R=\frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{2(rt-s^2)}\Big\{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t$$
$$\pm\sqrt{[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(p^2+q^2+1)(rt-s^2)}\Big\}\ldots(k)$$

Les deux valeurs données par la formule (i) représentent les tangentes trigonométriques des angles formés avec l'axe des x par les projections sur le plan des xy des axes rectangulaires de l'indicatrice; ou des lignes d'intersection du plan tangent à la surface avec les plans normaux qui contiennent le plus grand et le plus petit rayon de courbure. Les deux valeurs données par la formule (k) appartiennent

à ces rayons mêmes, qui sont appelés généralement *rayons de courbure principaux*.

Nous remarquerons que les formules (i) et (k) donnent toujours des valeurs réelles; car on a identiquement

$$(1+p^2)^2\left\{[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(p^2+q^2+1)(rt+s^2)\right\}=$$
$$\left\{(1+p^2)[(1+p^2)t-(1+q^2)r]+2pq[pqr-(1+p^2)s]\right\}^2$$
$$+4(p^2+q^2+1)[pqr-(1+p^2)s]^2.$$

569. La valeur du rayon de courbure d'une section normale quelconque s'exprime très-simplement en fonction des deux rayons de courbure principaux. Concevons en effet les positions des plans coordonnés, changées de manière que le plan des xy devienne parallèle au plan tangent mené à la surface proposée au point m. On aura donc pour ce point $p=0$, $q=0$, et l'équation (e), appartenant à l'indicatrice, se réduira à

$$2\delta = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2.$$

Si de plus les axes des x et des y étaient placés de manière à coïncider avec les axes rectangulaires de l'indicatrice, on voit par cette équation que l'on aurait $s=0$. Ainsi, en faisant $p=0$, $q=0$ et $s=0$, on exprime les conditions nécessaires pour que les plans des xz et des yz coïncident avec les plans des sections normales auxquelles appartiennent les deux rayons de courbure principaux. Dans ce cas, l'expression (g) du rayon de courbure d'une section normale quelconque, se réduit à

$$\rho=\frac{\alpha^2+\beta^2}{r\alpha^2+t\beta^2};$$

et en représentant par φ l'angle formé par le plan de cette

section normale avec les plans des xz, elle prendra la forme

$$\rho = \frac{1}{r\cos.^2\varphi + t\sin.^2\varphi}.$$

Nous remarquerons d'abord que cette expression donne

$$\frac{1}{\rho} = r\cos.^2\varphi + t\sin.^2\varphi,$$

et que si l'on appelait ρ_1 le rayon de courbure appartenant à la section normale, dont le plan est perpendiculaire à celui de la section à laquelle appartient le rayon ρ, on aurait

$$\frac{1}{\rho_1} = r\sin.^2\varphi + t\cos.^2\varphi.$$

Donc

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = r + t,$$

équation très-remarquable, d'où l'on conclut que la somme des inverses des rayons de courbure appartenant à deux sections normales quelconques rectangulaires est constante. Ainsi l'on a toujours

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}.$$

R et R_1 représentant les rayons de courbure principaux.

D'ailleurs, l'équation qui a donné, dans le n° 568, l'expression (k) des rayons de courbure principaux, indique que l'on a en général

$$R + R_1 = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,\frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{rt - s^2},$$

$$RR_1 = \frac{(p^2 + q^2 + 1)^2}{rt - s^2};$$

et par conséquent

$$\frac{R+R_1}{RR_1}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

570. Si maintenant on fait successivement $\varphi=0$ et $\varphi=\frac{\pi}{2}$ dans l'expression $\rho=\frac{1}{r\cos.^2\varphi+t\sin.^2\varphi}$ du numéro précédent, elle donnera

$$R=\frac{1}{r} \quad \text{et} \quad R_1=\frac{1}{t}$$

pour les valeurs des rayons de courbure principaux appartenant respectivement aux sections normales qui coïncident avec les plans des xz et des yz. D'où il suit que l'expression de ρ, du n° 568, peut être remplacée par la suivante :

$$\rho=\frac{RR_1}{R_1\cos.^2\varphi+R\sin.^2\varphi}, \quad \text{ou} \quad \rho=\frac{2RR_1}{R+R_1-(R-R_1)\cos.^2\varphi}.$$

On connaît ainsi la valeur du rayon de courbure d'une section normale quelconque en fonction des deux rayons de courbure principaux, et de l'angle φ formé par cette section normale avec celle qui contient le rayon R.

Il résulte de ce qui précède que deux surfaces qui se touchent en un point donné, si elles ont les mêmes rayons de courbure principaux, ont en ce point dans tous les sens un contact du second ordre, c'est-à-dire que toutes les sections normales faites dans ces deux surfaces ont respectivement des rayons de courbure égaux. On voit aussi que, dans une étendue infiniment petite autour d'un point quelconque m d'une surface, on peut concevoir cette surface comme pou-

vant être décrite de deux manières par la révolution d'un arc de cercle, savoir : 1° par la révolution du plus grand cercle osculateur tournant autour d'un axe tracé dans son plan perpendiculairement à la normale, et passant par le centre du plus petit cercle osculateur; 2° par la révolution du plus petit cercle osculateur tournant autour d'un axe tracé dans son plan perpendiculairement à la normale, et passant par le centre du plus grand cercle osculateur. En effet, les deux surfaces ainsi décrites ont évidemment les deux mêmes rayons de courbure principaux que la surface proposée.

571. Considérons maintenant (fig. 55) une section faite obliquement dans la surface par un plan mené par la tangente mh de la section normale nmn', à laquelle appartient le rayon de courbure ρ. Soit omo' l'intersection de ce plan oblique avec la surface, et oo' l'intersection de ce même plan avec le plan de l'indicatrice. Désignons par ω l'angle formé par la normale mf avec la perpendiculaire mg, menée dans le plan oblique à la tangente mh. Si l'on demande la valeur du rayon de courbure de la section oblique omo', on remarquera que la différence des lignes nf et og, ou celle des arcs mn et mo, est du même ordre que la distance mf, c'est-à-dire infiniment petite par rapport à ces arcs eux-mêmes. On peut donc prendre mn pour la longueur de l'arc mo. Ainsi le rayon de courbure de la section oblique omo' étant, d'après le n° 565,

$$\frac{\overline{mo}^2}{2.mg},$$

on peut écrire, au lieu de cette expression,

$$\frac{\overline{mn}^2}{2.\dfrac{mf}{\cos.\omega}} = \rho\cos.\omega = \frac{RR_1\cos.\omega}{R_1\cos.^2\varphi + R\sin.^2\varphi},$$

Cette formule donne, d'une manière très-simple, le rayon de courbure d'une section oblique quelconque, faite dans une surface, en fonction des deux rayons de courbure principaux; de l'angle φ formé par la tangente de la section oblique avec le plan de la section qui contient le rayon ρ; et de l'angle ω compris entre le plan de la section oblique et la normale à la surface.

Des lignes de courbure.

572. Les sections normales correspondantes aux axes rectangulaires de l'indicatrice, auxquelles appartiennent les rayons de courbure principaux, présentent une propriété très-remarquable. Soit (fig. 56) *non* l'indicatrice, *m* le centre de cette courbe, et *nn* la trace d'une section normale quelconque. Si l'on voulait mener par le point *n* une normale à la surface, cette ligne devrait être perpendiculaire en même temps à la section normale projetée en *nn*, et à la tangente *ni* menée à l'indicatrice au point *n*. La projection de cette normale sur le plan de l'indicatrice serait donc la ligne *nk* perpendiculaire à *ni*, et par conséquent la normale dont il s'agit ne rencontrera pas en général la normale à la surface menée par le point *m*. Mais les deux normales se rencontreront si la trace *nn* coïncide avec l'un ou l'autre des axes rectangulaires NN, NN', de l'indicatrice. Ainsi, en chaque point d'une surface, les sections normales auxquelles appartiennent les rayons de courbure principaux se distinguent de toutes les autres par une propriété caractéristique, qui consiste en ce que la normale à la surface, pour le point dont il s'agit, rencontre la normale pour un point infiniment voisin, pris sur l'une ou sur l'autre de ces

deux sections. Le point de rencontre de ces deux normales est évidemment le centre de courbure de la section.

L'existence de cette propriété peut être vérifiée immédiatement de la manière suivante. Considérons la normale menée à la surface au point m, et soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de cette ligne. Ses équations seront, d'après le n° 217,

$$x - x' + p(z - z') = 0,$$
$$y - y' + q(z - z') = 0;$$

et si on les différentie par rapport à x, y, z, en y regardant x', y', z', comme des constantes, les équations obtenues de cette manière appartiendront à l'intersection de cette droite avec une droite infiniment voisine qui satisfera aux deux conditions d'être aussi normale à la surface, et d'avoir avec la première normale un point commun. Cette différentiation donne

$$dx + dp(z - z') + pdz = 0,$$
$$dy + dq(z - z') + qdz = 0;$$

ou, en faisant attention que $dz = pdx + qdy$, $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$,

$$(1 + p^2)dx + pqdy + (rdx + sdy)(z - z') = 0,$$
$$pqdx + (1 + q^2)dy + (sdx + tdy)(z - z') = 0.$$

En éliminant maintenant $z - z'$ entre ces deux dernières équations, ce qui donne

$$[(1+q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]\frac{dy}{dx} - [(1+p^2)s - pqr] = 0,$$

on obtient une équation à laquelle doit satisfaire la valeur de

$\frac{dy}{dx}$ appartenant à la projection horizontale de la courbe suivant laquelle il faut se déplacer sur cette surface pour satisfaire à la condition que deux normales infiniment voisines soient comprises dans un même plan. Or cette équation est précisément celle qui donne les deux valeurs du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ auxquelles correspondent les rayons de courbure principaux. On reconnaît d'ailleurs immédiatement que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ données par cette équation appartiennent respectivement à deux lignes qui se coupent à angle droit, lorsqu'on suppose, comme dans le n° 569, la position des plans coordonnés changée de manière que le plan des xy devienne parallèle au plan qui touche la surface au point m. On a alors $p=0, q=0$, et l'équation précédente se réduit à

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{r-t}{s}\left(\frac{dy}{dx}\right)-1=0:$$

les deux racines donneraient donc les tangentes trigonométriques de deux angles suppléments l'un de l'autre, c'est-à-dire que les directions des courbes auxquelles elles appartiendraient seraient perpendiculaires entre elles.

Si l'on élimine maintenant $\frac{dy}{dx}$ entre les deux équations qui ont été trouvées ci-dessus, on aura

$$(rt-s^2)(z-z')^2+[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t](z-z')+1+p^2+q^2=0.$$

Cette équation, réunie aux deux équations de la normale, donnera les coordonnées x', y', z' du point de rencontre des

deux normales consécutives, c'est-à-dire du centre de courbure. Comme elle est du second degré, chacune de ces coordonnées aura en général deux valeurs, en sorte qu'il y aura sur la même normale deux centres de courbure appartenant respectivement aux sections rectangulaires déterminées par l'équation précédente. Quant à la grandeur du rayon de courbure, si on la désigne comme ci-dessus par R, on a évidemment

$$z' - z = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

L'équation que l'on vient d'obtenir s'accorde donc avec celle qui a été trouvée n° 568, et dont on a déduit l'expression (k) des rayons de courbure principaux de la surface.

573. On voit, par ce qui précède, qu'après s'être placé en un point quelconque d'une surface donnée, on peut passer de ce point à un point voisin suivant deux directions qui forment entre elles un angle droit, avec la condition que les normales menées à la surface par les deux points seront comprises dans le même plan et se rencontreront. Après s'être ainsi transporté dans un second point on peut passer à un troisième, puis à un quatrième, et ainsi de suite, en s'assujettissant toujours à la même condition. On tracera de cette manière sur la surface une ligne continue, que l'on a nommée *ligne de courbure*, et dont la considération est importante. Il existe ainsi, pour chaque point d'une surface, deux lignes de courbure, qui se coupent à angle droit dans ce point. En concevant toutes ces lignes tracées sur la surface, on voit qu'elles la divisent en deux systèmes de zones, dont le croisement forme des figures rectangulaires. Les deux lignes de courbure qui se coupent

en chaque point, correspondent aux sections normales de plus grande et de plus petite courbure, c'est-à-dire aux *sections normales principales*.

L'équation

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{dy}{dx}-[(1+p^2)s-pqr]=0$$

qui a été obtenue précédemment, est l'équation différentielle de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy. Comme elle est du second degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$, son intégrale contiendra une constante arbitraire élevée au quarré; et si l'on veut déterminer cette constante de manière à faire passer la ligne de coubure par un point donné de la surface, on trouvera deux valeurs qui appartiendront respectivement aux lignes de courbure de chaque système.

En éliminant r et t au moyen des relations $dp=rdx+sdy$, $dq=sdx+tdy$, et en se rappelant que $dz=pdx+qdy$, cette équation prend la forme

$$dp(dy+qdz)=dq(dx+pdz)$$

qui doit être remarquée.

574. L'examen des diverses figures que peut affecter la courbe appelée indicatrice est très-propre à faire juger des modifications que présente la courbure des surfaces. L'équation (b) du n° 566, dans laquelle on n'a conservé que les termes du second ordre en α et β,

$$\gamma=p\alpha+q\beta+\frac{1}{2}(r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2),$$

appartient à une surface du second degré; d'où l'on conclut

qu'une telle surface peut en général avoir dans toutes les directions autour d'un point quelconque une osculation du second ordre avec la surface proposée. La surface proposée et la surface du second degré osculatrice doivent être regardées comme se confondant l'une avec l'autre dans une étendue infiniment petite autour du point m, et l'indicatrice comme appartenant à l'une et à l'autre. L'équation (e) de la projection de l'indicatrice sur un plan parallèle au plan des xy a été donnée n° 566 : nous l'écrirons simplement

$$D = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2,$$

en faisant pour abréger $D = 2\delta\sqrt{p^2 + q^2 + 1}$; cette équation résolue par rapport à β donne

$$\beta = \frac{-s\alpha \pm \sqrt{Dt - (rt - s^2)\alpha^2}}{t}.$$

575. Si la fonction $rt - s^2$ est positive, l'indicatrice est une ellipse, et la surface osculatrice du second degré est un ellipsoïde. Tous les diamètres de l'ellipse étant réels, les quarrés de ces diamètres, auxquels les rayons de courbure des sections normales sont proportionnels, sont tous positifs. Toutes les sections normales ont leurs courbures tournées dans le même sens. Le même résultat se conclut de l'expression (k) du n° 568.

576. Si la fonction $rt - s^2$ est négative, l'indicatrice est une hyperbole, et la surface osculatrice du second degré est un hyperboloïde. Les diamètres de l'indicatrice, ayant leurs quarrés positifs, tandis que les diamètres imaginaires ont leurs quarrés négatifs, les deux courbures principales de la surface sont tournées en sens contraires; et en

général, parmi les diverses sections normales, les unes ont leur courbure tournée dans un sens, les autres dans le sens opposé. Les asymptotes de l'hyperbole, dans la direction desquelles la courbure est nulle, séparent les sections normales qui ont respectivement leur courbure tournée dans un sens ou dans l'autre.

On obtiendra la direction de ces asymptotes en égalant à zéro le dénominateur de l'expression (g) du n° 567, ce qui donne

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0.$$

Ainsi l'équation différentielle

$$r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

appartient à la projection sur le plan des xy des courbes tracées sur la surface proposée dans le sens desquelles la courbure est nulle, ou le rayon de courbure infini.

L'équation différentielle

$$dz = pdx + qdy$$

appartient également au plan tangent à la surface au point m, et à la surface elle-même; on en déduit

$$d^2z = dp\,.\,dx + dq\,.\,dy, \quad \text{ou} \quad d^2z = rdx^2 + 2sdydx + tdy^2.$$

Mais on a pour le plan tangent $d^2z = 0$: donc en écrivant

$$rdx^2 + 2sdydx + tdy^2 = 0,$$

on établit entre dx et dy une relation qui appartient à la ligne d'intersection de la surface proposée et de son plan

tangent. Ainsi dans les surfaces du genre de celles dont il s'agit, c'est-à-dire lorsque les deux courbures principales sont dirigées en sens contraires, la surface est coupée par son plan tangent suivant deux lignes dont les directions coïncident avec les asymptotes de l'indicatrice.

L'angle compris entre ces asymptotes peut faire juger du rapport des deux courbures. En effet, le rapport des deux axes de l'hyperbole étant exprimé par la tangente trigonométrique de cet angle, le rapport des rayons de courbure principaux le sera par le carré de cette tangente trigonométrique.

577. Si la fonction $rt - s^2$ a une valeur nulle, l'expression de $\mathfrak{6}$ du n° 574 se réduit à

$$\mathfrak{6} = \frac{-s\alpha \pm \sqrt{Dt}}{t}$$

et représente le système de deux lignes droites, formant avec l'axe des x un angle dont la tangente trigonométrique est $-\frac{s}{t}$. L'indicatrice est donc formée ici de deux lignes droites parallèles, et la surface osculatrice du second degré est une surface cylindrique. Tous les diamètres de l'indicatrice étant réels, la surface a toutes ses courbures dirigées dans le même sens; mais la courbure est nulle dans le sens des lignes droites dont il s'agit. En effet, en supposant $rt - s^2 = 0$ dans l'expression (k) du n° 568, qui donne les valeurs des rayons de courbure principaux, on voit que l'une des racines de cette équation est alors finie, l'autre infinie, et qu'elles sont de même signe. La propriété d'avoir un contact du second ordre avec une surface cylindrique, appartient aux surfaces appelées *développables*, et les

caractérise. L'équation aux différences partielles du second ordre

$$rt - s^2 = 0,$$

qui exprime cette propriété, convient à toutes les surfaces de ce genre.

578. Les deux valeurs de R données par l'expression (*k*) du n° 568 seront égales et de même signe si l'on a

$$[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 - 4(1+p^2+q^2)(rt - s^2) = 0.$$

Cette dernière équation exprime donc la condition nécessaire pour que les deux rayons de courbure principaux soient égaux entre eux et dirigés dans le même sens. L'expression de ρ du n° 570 montre que dans ce cas les rayons de courbure de toutes les sections normales sont égaux entre eux. Les points d'une surface où cette circonstance se présente, et dans lesquels l'indicatrice est un cercle, sont ordinairement très-remarquables : on leur a donné le nom d'*ombilics*. Il importe d'observer que d'après la remarque qui a été faite à la fin du n° 568, l'équation précédente ne peut pas subsister, à moins que l'on n'ait séparément les deux équations

$$(1+q^2)r - (1+p^2)t = 0,$$
$$(1+p^2)s - pqr = 0,$$

lesquelles entraînent la suivante

$$(1+q^2)s - pqt = 0.$$

On peut se convaincre d'ailleurs que l'égalité des deux rayons

de courbure principaux entraîne toujours l'existence de la double équation

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t},$$

en remarquant que la formule du n° 570 prouvant que les rayons de courbure de toutes les sections normales sont alors égaux entre eux, il est nécessaire que le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ disparaisse dans l'expression (g) du n° 567, ce qui ne pourrait avoir lieu si cette double équation n'existait point.

Cette double équation rendant identique l'équation du n° 568 dont dépend l'expression de $\frac{\beta}{\alpha}$, ou (ce qui est la même chose), l'équation du n° 572, dont dépend l'expression de $\frac{dy}{dx}$ qui convient aux directions des lignes de courbure principales, on ne peut plus rien conclure relativement à ces directions. Il existe des ombilics où il ne passe qu'une seule ligne de courbure principale, d'autres où il en passe un nombre fini plus grand que deux, d'autres enfin où un nombre infini de lignes de courbure se croisent dans toutes les directions. Les sommets ou pôles des surfaces de révolution sont dans ce dernier cas. La distinction des divers cas qui se présentent peut se déduire de l'équation même

$$[(1+q^2)s-pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\frac{dy}{dx}-[(1+p^2)s-pqr]=0$$

dont il s'agit, en la différentiant successivement par rapport à x et y, $\frac{dy}{dx}$ étant regardé comme constant. On ob-

tient ainsi des équations du troisième, du quatrième, etc., degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$, qui donneront les valeurs propres à mettre en évidence les véritables directions des lignes de courbure.

La surface sphérique est la seule pour tous les points de laquelle on ait la relation

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}.$$

579. Les deux valeurs de R données par la formule (k) du n° 568, seront égales et de signes contraires si l'on a

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0.$$

Dans ce cas les deux courbures principales sont égales et dirigées en sens opposés. L'indicatrice est une hyperbole équilatère. Les sections normales, placées symétriquement par rapport aux axes ou aux asymptotes de cette hyperbole, présentent des courbures égales entre elles. Les lignes dans le sens desquelles la courbure est nulle, se croisent à angle droit comme les lignes de courbure principales. L'équation précédente ne diffère point d'ailleurs de celle qui a été trouvée n° 517, pour l'expression de la condition que l'aire de la surface comprise dans un contour quelconque soit un minimum. Ainsi les surfaces qui satisfont à cette condition ont la propriété d'avoir dans tous leurs points leurs deux rayons de courbure principaux égaux et dirigés en sens contraires, proposition digne de remarque.

De la surface lieu des centres de courbure.

580. Un point m étant pris sur une surface donnée, concevons les deux lignes de courbure qui se croisent en ce point, et le plan normal qui est dirigé dans le sens de l'une des lignes de courbure. Si l'on admet que ce plan se meut dans l'espace sans cesser d'être normal à la surface proposée, et tangent à la ligne de courbure dont il s'agit, l'espace qu'il décrira aura pour enveloppe une surface développable, coupant à angle droit la surface proposée. Cette surface développable sera le lieu de toutes les normales à la surface proposée, menées par la ligne de courbure, et ces normales en seront les caractéristiques. Les intersections des normales consécutives traceront sur la surface développable une de ces lignes remarquables qúe l'on a désignées sous le nom d'*arêtes de rebroussement*. L'arête de rebroussement sera le lieu des centres de courbure correspondants aux différents points de la ligne de courbure qui a servi de directrice au mouvement du plan normal.

En concevant également le plan normal à la surface au point m, qui est dirigé dans le sens de la seconde ligne de courbure, et admettant de même que ce plan se meut sans cesser d'être normal à la surface et tangent à cette ligne, on obtiendra une autre surface développable qui sera le lieu des normales à la surface proposée, menées par les points de la seconde ligne de courbure, et dont l'arête de rebroussement sera le lieu des centres de courbure correspondants à ces points.

On peut se représenter construites dans l'espace toutes les surfaces développables appartenant au premier système de lignes de courbure de la surface proposée, et toutes les sur-

faces développables appartenant au second système de ces lignes de courbure. Les surfaces développables du premier système couperont partout à angle droit celles du second. Les deux systèmes de surfaces dont il s'agit, partageront l'espace en parties rectangulaires d'une longueur infinie, dans le sens des normales à la surface proposée. La suite des arêtes de rebroussement des surfaces développables appartenant au premier système formera elle-même une autre surface, sur laquelle se trouveront tous les centres de l'une des courbures. La suite des arrêtes de rebroussement des surfaces développables appartenant au second système des lignes de courbure formera également une seconde surface, qui sera le lieu de tous les centres de l'autre courbure. Les surfaces lieu des centres de courbure sont, par rapport à la surface proposée, ce que la développée d'une courbe plane est par rapport à cette courbe.

581. Les équations des surfaces dont on vient de parler peuvent être obtenues comme il suit. Reprenons les équations de la normale du n° 572 :

$$\left.\begin{aligned} x - x' + p(z - z') = 0\,, \\ y - y' + q(z - z') = 0\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

et les suivantes

$$[(1+q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\frac{dy}{dx} - [(1+p^2)s - pqr] = 0, \quad (2)$$

$$(rt - s^2)(z - z')^2 + [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t](z - z') + 1 + p^2 + q^2 = 0, \quad (3)$$

qui en ont été déduites. L'équation (2) aux différences ordinaires entre les variables x et y appartient aux projections sur le plan des xy des lignes de courbure de la surface proposée. Cette équation du premier ordre et du second degré par rap-

port au coefficient $\frac{dy}{dx}$ étant intégrée, son intégrale sera complétée par une constante arbitraire qui s'y trouvera élevée au second degré. En déterminant donc cette constante de manière à faire passer une ligne de courbure par un point donné, on trouvera deux valeurs, correspondant respectivement aux deux lignes de courbure qui se croisent dans tous les points de la surface. Indiquons pour abréger par (2') l'intégrale générale de l'équation (2) dont il s'agit. Il est visible qu'en éliminant x, y, z entre l'équation de la surface proposée, les équations (1) et l'équation (2'), l'équation restante en x', y', z', appartiendra aux surfaces développables normales qui coupent la surface suivant ses lignes de courbure. Elle donnera l'une quelconque de ces surfaces développables en y déterminant convenablement la constante arbitraire qui s'y trouve contenue.

582. L'équation (3) est une équation primitive en x, y, z, et z'. Elle doit donner la valeur de z', appartenant au point d'intersection de deux normales consécutives, c'est-à-dire au centre de courbure. En éliminant x, y, z entre l'équation de la surface proposée, les équations (1) et l'équation (3), on aura donc en x', y' et z' l'équation de la surface lieu des centres de courbure. Cette équation montera au second degré par rapport à z'. Si elle peut se décomposer en deux facteurs, on obtiendra, en les égalant séparément à zéro, les équations distinctes de deux surfaces qui contiendront respectivement les centres de l'une et de l'autre courbure de la surface proposée. Si cette décomposition n'a pas lieu, les centres des deux courbures se trouveront placés sur deux nappes appartenant à une surface unique.

Une normale quelconque à la surface proposée touche à la fois les deux nappes qui contiennent respectivement les centres

de l'une et de l'autre courbure, et si l'on mène par cette normale deux plans tangents à ces deux nappes, ces plans se couperont à angle droit. Donc les deux nappes de la surface lieu des centres de courbure sont toujours telles, qu'étant regardées d'un point quelconque, leurs contours apparents paraissent se croiser à angles droits. Ainsi une surface quelconque n'est pas propre à devenir le lieu des centres de courbure d'une autre surface; on peut prendre arbitrairement le lieu des centres de l'une des courbures; mais la surface qui contiendrait les centres de l'autre courbure doit être telle que son contour apparent paraisse toujours couper celui de la première à angle droit.

583. Lorsque la surface qui contient les centres de l'une des courbures coupe la surface qui contient les centres de l'autre courbure, les points d'intersection appartenant également à l'une et à l'autre courbure, répondent aux points de la surface proposée, pour lesquels les deux rayons de courbure principaux sont égaux entre eux, points qui sont déterminés par l'équation

$$[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)=0,$$

comme on l'a vu n° 578. Cette équation donne la projection sur le plan des xy de la ligne des *courbures sphériques* sur la surface proposée.

584. Chacune des arêtes de rebroussement des surfaces développables normales, dont la réunion forme les deux nappes de la surface lieu des centres de courbure, est une ligne de plus courte distance sur cette dernière surface. En effet, le plan passant par deux normales consécutives, appartenant à l'une de ces surfaces développables normales, est en même temps le plan osculateur de l'arête de rebroussement au

point d'intersection de ces deux normales, et perpendiculaire au même point à la nappe de la surface lieu des centres de courbure, sur laquelle cette arête de rebroussement est placée. Or le caractère de la ligne de plus courte distance sur une surface quelconque consiste en ce que le plan osculateur de cette ligne soit en même temps normal à la surface.

Concevons un fil dont une extrémité est fixée sur un point de la ligne d'intersection des deux nappes qui contiennent respectivement les centres de l'une et l'autre courbure. En tendant ce fil, et le faisant mouvoir de manière qu'il soit en partie plié sur cette intersection, et que la portion libre soit dirigée dans le sens de la tangente, l'extrémité opposée décrira la ligne des courbures sphériques sur la surface proposée. Si l'on fait ensuite mouvoir le même fil de manière qu'il soit en partie plié sur l'intersection des deux nappes dont on vient de parler, et en partie sur l'une ou sur l'autre de ces nappes, l'extrémité pourra se transporter dans tous les points de la surface proposée, qui peut ainsi être décrite de deux manières différentes par le mouvement d'un fil plié sur la surface lieu des centres de courbure, comme l'est une courbe par le mouvement d'un fil plié sur sa développée.

Exemple de la détermination des lignes de courbure et des rayons de courbure.

585. Soit

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

l'équation de la surface proposée. Cette surface est un paraboloïde dont l'axe des z est l'axe principal. Les sections faites

parallèlement au plan des xy sont des ellipses ayant leurs axes dirigés dans le sens des x et dans le sens des y. La longueur des demi-axes de ces sections dans le sens des x est $\sqrt{2az}$, et la longueur des demi-axes dans le sens des y est $\sqrt{2bz}$. Nous supposerons ici $a > b$.

Nous aurons

$$\frac{dz}{dx} = p = \frac{x}{a}, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = r = \frac{1}{a},$$

$$\frac{dz}{dy} = q = \frac{y}{b}, \qquad \frac{d^2z}{dxdy} = s = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = t = \frac{1}{b},$$

et ces valeurs étant substituées dans l'équation des lignes de courbure

$$[(1+q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\frac{dy}{dx} - [(1+p^2)s - pqr] = 0$$

qui a été trouvée n° 572, il viendra

$$-\frac{xy}{ab^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{1}{a} - \left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{1}{b}\right]\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{a^2b} = 0.$$

Cette équation, en posant pour abréger

$$A = \frac{a}{b}, \qquad B = a(a-b),$$

s'écrira

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 + B)\frac{dy}{dx} - xy = 0 : \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

elle appartient à la projection des lignes de courbure de la surface proposée sur le plan des xy.

Pour l'intégrer, on la différentiera d'abord, ce qui donnera

$$\left(2Axy\frac{dy}{dx}+x^2-Ay^2+B\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=0,$$

puis on éliminera B entre cette équation du second ordre et l'équation (m). La constante A disparaîtra également du résultat de l'élimination, et l'on trouvera

$$x\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]-y\frac{dy}{dx}=0.$$

Cette dernière équation étant multipliée par le facteur $\frac{dx}{x^2}$ devient

$$\frac{xd.y\frac{dy}{dx}-y\frac{dy}{dx}d.x}{y^2}=0,$$

dont le premier membre est la différentielle exacte de $\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$. On a donc, en intégrant une première fois,

$$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=\alpha, \quad \text{ou} \quad ydy=\alpha.xdx;$$

et en intégrant une seconde fois

$$y^2=\alpha x^2+\beta,$$

α et β étant deux constantes.

L'équation $y^2=\alpha x^2+\beta$ est l'intégrale générale de l'équation (m). Mais comme cette dernière n'est que du premier ordre, son intégrale ne doit contenir qu'une seule constante

arbitraire. L'une des constantes α, β, est déterminée par la condition que l'équation $y^2 = \alpha x^2 + \beta$ satisfasse à l'équation (m). En substituant donc dans l'équation les valeurs

$$y = \pm\sqrt{\alpha x^2 + \beta}, \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}},$$

on trouve pour condition

$$A\alpha\beta - B\alpha + \beta = 0,$$

d'où

$$\beta = \frac{B\alpha}{A\alpha + 1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \beta = \frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha + b}.$$

L'équation sous forme finie des lignes de courbure est par conséquent

$$y^2 = \alpha x^2 + \frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha + b}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n)$$

dans laquelle α est la constante arbitraire.

586. Si l'on veut déterminer la constante α de manière que l'équation (n) appartienne à une ligne de courbure, passant par un point donné de la surface proposée dont les abscisses seraient x' et y', on fera $x = x'$, $y = y'$ dans cette équation, et on la résoudra par rapport à α, ce qui donnera

$$\alpha = -\frac{c}{2ax'^2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2ax'^2}\right)^2 + \frac{b}{a}\frac{y'^2}{x'^2}},$$

en posant

$$c = bx'^2 - ay'^2 + ab(a-b).$$

Ainsi l'on trouvera toujours, pour la constante α, deux va-

leurs réelles, l'une positive et l'autre négative; et ces valeurs étant substituées dans l'équation (n) donneront respectivement les équations des projections des deux lignes de courbure qui se croisent dans le point auquel appartiennent les abscisses x', y'.

La valeur positive de α donnera, pour les projections du premier système des lignes de courbure, des hyperboles ayant leur axe réel dirigé dans le sens de l'axe des y, dont les équations seront

$$y^2 = \alpha x^2 + \frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha + b}.$$

La grandeur du demi-axe est $\sqrt{\frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha+b}}$. La plus petite valeur que puisse prendre ce demi-axe est 0, ce qui répond aux cas où l'on supposerait x' très-grande et y' très-petite : les deux branches de l'hyperbole se confondent alors avec l'axe des x. La plus grande valeur que puisse prendre ce demi-axe est $\sqrt{b(a-b)}$, ce qui répond au cas où la valeur positive de α serait infinie, parce que l'on aurait supposé x' très-petite et y' très-grande. L'hyperbole s'écarterait alors très-peu de l'axe des y. Si l'on porte donc sur l'axe des y de part et d'autre de l'origine une distance égale à $\sqrt{b(a-b)}$, on aura deux points, au delà desquels les sommets des hyperboles qui donnent le premier système des lignes de courbure ne pourront pas être placés.

La valeur négative de α donnera pour les projections du second système de courbure, des ellipses ayant leurs axes rectangulaires dirigés dans le sens de l'axe des x et de l'axe des y, et dont les équations seront

$$y^2 = -\alpha x^2 + \frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha - b}.$$

La grandeur du demi-axe, placé dans le sens de l'axe des x, est $\sqrt{\frac{ab(a-b)}{a\alpha-b}}$, et la grandeur du demi-axe, placé dans le sens de l'axe des y, est $\sqrt{\frac{ab(a-b)\alpha}{a\alpha-b}}$, en sorte que le rapport de ces deux axes est égal à $\sqrt{\alpha}$. En supposant x' extrêmement grande, la valeur négative de α est à fort peu près égale à $\frac{b}{a}$, ce qui est la plus petite valeur absolue que l'on puisse attribuer à cette quantité. A mesure que x' diminue, la valeur absolue de α augmente, pourvu que la quantité c demeure positive, et, cette condition étant satisfaite, α deviendra infiniment grande quand x' sera supposée infiniment petite. Alors l'axe de l'ellipse, placé dans le sens dex x, sera infiniment petit, et la moitié de l'axe, placé dans le sens des y, sera égale à $\sqrt{b(a-b)}$. Il n'est pas possible, d'ailleurs, de supposer à la fois x' assez petite et y' assez grande pour que la quantité c devenant négative, la valeur de α puisse devenir aussi petite qu'on le voudrait; car l'équation des lignes de courbure ne donne que des valeurs imaginaires quand α étant supposée négative, on attribue à cette constante une valeur absolue moindre que $\frac{b}{a}$. On voit que les points placés sur l'axe des y, à la distance $\sqrt{b(a-b)}$ de l'origine, forment ici une limite commune que les sommets des deux systèmes de lignes de courbure ne peuvent dépasser dans un sens ou dans l'autre.

Les axes des x et des y sont au nombre des lignes qui appartiennent aux projections des deux systèmes de lignes de courbure du paraboloïde.

587. L'équation générale de la projection de l'indicatrice

$$D = r\alpha^2 + 2s\alpha b + t\beta^2$$

devient ici

$$D = \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b}:$$

cette projection appartient toujours à une ellipse, ainsi que le comporte la nature de la surface proposée, dont les deux courbures sont dans toute son étendue dirigées dans le même sens.

Quant à la relation

$$\frac{1 + p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1 + q^2}{t},$$

qui, d'après le n° 578, doit subsister dans les ombilics, c'est-à-dire dans les points où tous les rayons de courbure sont égaux, elle devient

$$\frac{a^2 + x^2}{a} = \frac{xy}{0} = \frac{b^2 + y^2}{b}.$$

Cette relation ne peut être satisfaite qu'en supposant $x = 0$ et $y = \sqrt{b(a - b)}$, c'est-à-dire pour les points de la surface qui séparent les sommets des ellipses et des hyperboles appartenant respectivement aux deux systèmes de lignes de courbure. Les deux points dont il s'agit sont les seuls ombilics que la surface proposée puisse présenter. L'indicatrice y doit être circulaire; en effet, le plan tangent est en ces deux points parallèle aux deux systèmes de plans qui coupent le paraboloïde suivant des cercles.

588. A l'égard des valeurs des rayons de courbure principaux, on trouvera, en substituant les expressions des coefficients différentiels p, q, r, s, t qui ont été données n° 585

dans l'expression (k) du n° 568 :

$$R = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}\left\{\frac{a^2+x^2}{a}+\frac{b^2+y^2}{b}\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{\left(\frac{a^2+x^2}{a}+\frac{b^2+y^2}{b}\right)^2-4ab\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1\right)}\right\}.$$

589. Lorsqu'il s'agira d'un paraboloïde de révolution, les deux quantités désignées par a et b seront égales entre elles. L'expression de α du n° 586 se réduira à

$$\alpha = -\frac{x'^2-y'^2}{2x'^2} \pm \sqrt{\left(\frac{x'^2-y'^2}{2x'^2}\right)^2+\frac{y'^2}{x'^2}},$$

ou bien

$$\alpha = -\frac{x'^2-y'^2}{2x'^2} \pm \frac{x'^2+y'^2}{2x'^2}.$$

La valeur positive de α est donc $\frac{y'^2}{x'^2}$. L'équation des projections hyperboliques du premier système des lignes de courbure se réduit à

$$y^2 = \frac{y'^2}{x'^2}.\,x^2,$$

et appartient au système de deux lignes droites qui se croisent à l'origine des coordonnées.

Quant à la valeur négative de α, elle est -1. Ainsi l'équation des projections elliptiques du second système des lignes de courbure devient

$$y^2 = -x^2 + \frac{0}{0}, \qquad \text{ou} \qquad y^2 + x^2 = \frac{0}{0},$$

qui appartient à un cercle dont le centre est placé à l'origine

des coordonnées, et dont on peut fixer arbitrairement le rayon. En effet, les lignes de courbure, dans une surface de révolution, sont évidemment dirigées dans le sens des méridiens et des parallèles.

La distance de l'ombilic au centre, exprimée ci-dessus par $\sqrt{b(a-b)}$, devient nulle : les deux ombilics se confondent en un seul qui est le sommet de la surface de révolution.

En faisant $a=b$, dans l'expression de R du n° 588, elle se réduit à

$$R=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+x^2+y^2}{a^2}}\left(\frac{2a^2+x^2+y^2}{a}\pm\frac{x^2+y^2}{a}\right).$$

Les deux rayons de courbure principaux dans le paraboloïde de révolution sont donc respectivement exprimés par

$$-\frac{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} \qquad \text{et} \qquad -(a^2+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme l'équation de la parabole dont la révolution autour de l'axe des z décrit cette surface est

$$z=\frac{x^2+y^2}{2a},$$

on voit que la première expression donne le rayon de courbure du méridien, et que la seconde donne le rayon de la courbure dans le sens du parallèle. Cette dernière expression représente la valeur de la normale de la courbe méridienne ; ce qui doit être, puisque toutes les sections faites dans le sens des parallèles ont leur centre de courbure placé sur l'axe de la surface de la révolution.

XLIV. Des surfaces les plus simples dont l'équation aux différences partielles est du premier ordre.

590. Revenons aux notions présentées dans les n°s 472 et suivants. Une surface quelconque peut en général être considérée comme l'enveloppe de l'espace parcouru par une autre surface qui se déplace sans changer de figure suivant une loi donnée, ou qui se déplace en changeant à la fois de position et de figure suivant des lois également données. Nous représentons généralement l'équation de l'enveloppée, exprimée en quantités finies, par

$$F(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots) = 0,$$

dans laquelle x, y, z désignent les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de cette surface; et $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots$ plusieurs constantes arbitraires, dont les valeurs varient suivant les diverses positions ou les diverses figures que l'enveloppée peut affecter. Mais si l'on veut considérer la surface qui enveloppe une série déterminée des positions de l'enveloppée, afin d'en rechercher les propriétés, on ne peut plus regarder dans l'équation précédente les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots$ comme tout à fait arbitraires et indépendantes les unes des autres. On doit concevoir que ces quantités sont liées par des relations qui distinguent la série des positions dont il s'agit. Par conséquent, laissant indéterminé un seul paramètre α, on regardera toutes les autres arbitraires $\beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots$ comme des fonctions données $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$, $\varpi(\alpha)$, $\ldots\ldots$ de ce paramètre, et l'on écrira au lieu de l'équation précédente pour représenter l'enveloppée

$$F\left\{x, y, z, \varphi(\alpha), \psi(\alpha), \varpi(\alpha), \ldots\right\} = 0.$$

En donnant dans cette équation à α toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on aura une certaine série d'enveloppées, déterminée par la forme des fonctions $\varphi, \psi, \varpi, \ldots$; et si ces fonctions demeurent arbitraires, les résultats que l'on obtiendra seront généraux et conviendront à toutes les surfaces possibles qui peuvent être produites par le mouvement d'une enveloppée quelconque comprise dans l'équation $F(x, y, z, \alpha, \beta, \beta, \gamma, \delta, \ldots) = 0$.

591. En différentiant successivement par rapport aux variables indépendantes x, y l'équation $F = 0$, on a deux nouvelles équations appartenant à l'enveloppée et à l'enveloppe, au moyen desquelles on peut éliminer deux des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Par conséquent, si l'équation $F = 0$ ne contient que deux de ces constantes, il reste une équation aux différences partielles du premier ordre entièrement délivrée des constantes arbitraires, qui d'après cela appartient à toutes les enveloppées comprises dans l'équation $F = 0$ aussi bien qu'à toutes les enveloppes que ces enveloppées peuvent produire, et qui exprime un caractère géométrique qui leur convient spécialement et les distingue de toutes les autres surfaces.

Si l'équation $F = 0$ de l'enveloppée contenait trois constantes arbitraires α, β, γ, les équations différentielles du premier ordre ne suffiraient pas en général pour les éliminer : il faudrait passer aux équations du second ordre; et l'on se trouverait conduit à des équations aux différences partielles d'un ordre supérieur et très-élevé, si le nombre des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ devenait très-grand.

Nous nous occupons surtout ici des cas où l'équation aux différences partielles obtenue est du premier ordre, mais sans négliger ce qu'il peut y avoir de général dans les considérations que nous exposons.

592. Lorsque l'équation de l'enveloppée

$$F\left\{x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha), \varpi(\alpha), \ldots\ldots\right\} = 0$$

est donnée, l'équation générale de l'enveloppe exprimée en quantités finies s'en déduit immédiatement. Car l'équation $F + \frac{dF}{d\alpha} d\alpha = 0$, que l'on peut réduire à $\frac{dF}{d\alpha} d\alpha = 0$, appartenant à l'enveloppée infiniment voisine, le système des équations

$$F = 0, \qquad \frac{dF}{d\alpha} = 0,$$

représente la courbe d'intersection de ces deux enveloppées, courbe que nous appelons caractéristique. Ces deux équations donneront donc toutes les caractéristiques possibles appartenant à la série des positions de l'enveloppée définie par les fonctions $\varphi, \psi, \varpi, \ldots\ldots$ quand on y fera varier α depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Donc, puisque l'enveloppe est évidemment le lieu de ces caractéristiques, l'équation de l'enveloppe est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations

$$F = 0, \qquad \frac{dF}{d\alpha} = 0,$$

élimination qui ne peut être effectuée qu'après que les fonctions $\varphi, \psi, \varpi, \ldots\ldots$ auront été définies.

593. Il existe généralement sur une enveloppe quelconque, et par conséquent sur une surface quelconque (car toutes les surfaces peuvent être regardées comme des enveloppes), diverses lignes remarquables dont le caractère géométrique résulte de la définition seule de l'enveloppée, et

subsiste, comme le caractère géométrique de l'enveloppe elle-même, indépendamment des lois arbitraires qui déterminent le mode de déplacement de cette enveloppée. Les équations aux différences ordinaires de ces lignes, comme on l'a vu dans les n°s 479 et suivants pour la caractéristique, peuvent être déduites de l'équation aux différences partielles de la surface, qu'elles servent à intégrer; et l'on peut aussi obtenir leurs équations en quantités finies au moyen de celle de l'enveloppée.

Quant à la caractéristique, elle est représentée par le système des deux équations

$$F = 0, \qquad \frac{dF}{d\alpha} = 0,$$

qui, lorsque les fonctions $\varphi, \psi, \varpi, \ldots\ldots$ auront été définies, donneront toutes les caractéristiques appartenant à une même enveloppe quelconque en fixant convenablement la valeur de α.

594. Considérons maintenant les deux caractéristiques consécutives qui résultent de l'intersection deux à deux de trois enveloppées consécutives. Les équations de ces trois enveloppées étant représentées par $F = 0$, $F + \frac{dF}{d\alpha} d\alpha = 0$, $F + 2\frac{dF}{d\alpha} d\alpha + \frac{d^2F}{d\alpha^2} d\alpha^2 = 0$, la première caractéristique est donnée par les deux équations $F = 0$ et $\frac{dF}{d\alpha} = 0$, et la seconde caractéristique par les deux équations $\frac{dF}{d\alpha} = 0$ et $\frac{d^2F}{d\alpha^2} = 0$. Ces deux lignes courbes se coupent en général en

même temps qu'elles se touchent en un point déterminé par les valeurs de x, y, z, qui satisfont simultanément aux trois équations

$$F = 0, \qquad \frac{dF}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{d^2F}{d\alpha^2} = 0.$$

En attribuant successivement à α toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, les valeurs de x, y, z, déduites de ces trois équations, appartiennent à la série des points dans lesquels chaque caractéristique est coupée et touchée par la caractéristique voisine. La suite de ces points forme toujours sur l'enveloppe une ligne remarquable, à laquelle on a donné le nom d'*arête de rebroussement*. Les arêtes de rebroussement partagent en général les surfaces en nappes distinctes : elles sont touchées par toutes les caractéristiques, et sont à leur égard de véritables enveloppes.

L'arête de rebroussement étant le lieu des points d'intersection de la caractéristique correspondante à une valeur déterminée de α, et de la caractéristique voisine, on a évidemment les équations de cette courbe pour une enveloppe déterminée en éliminant α entre les trois équations

$$F = 0, \qquad \frac{dF}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{d^2F}{d\alpha^2} = 0,$$

élimination qui ne pourra avoir lieu qu'après que les fonctions $\varphi, \psi, \varpi, \ldots\ldots$ qui définissent l'enveloppe auront été données. Les deux équations en x, y, z, qui résultent de cette élimination, appartiennent donc à l'arête de rebroussement.

595. Considérons encore trois caractéristiques consécutives résultant de l'intersection deux à deux des quatre enveloppées consécutives, dont les équations sont

$$F = 0\,,\quad F + \frac{dF}{d\alpha}\,d\alpha = 0\,,\quad F + 2\frac{dF}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{d^2F}{d\alpha^2}\,d\alpha^2 = 0\,,$$

$$F + 3\frac{dF}{d\alpha}\,d\alpha + 3\,\frac{d^2F}{d\alpha^2}\,d\alpha^2 + \frac{d^3F}{d\alpha^3}\,d\alpha^3 = 0.$$

Si ces trois caractéristiques se coupent en un seul point, ce qui ne peut avoir lieu que dans des cas très-particuliers, les valeurs de x, y, z, appartenant à ce point, satisferont à la fois aux quatre équations précédentes. Donc, si l'on élimine x, y, z entre les quatre équations,

$$F = 0\,,\qquad \frac{dF}{d\alpha} = 0\,,\qquad \frac{d^2F}{d\alpha^2} = 0\,,\qquad \frac{d^3F}{d\alpha^3} = 0,$$

l'équation en α, qui restera après cette élimination, donnera la valeur de ce paramètre, à laquelle correspondra la caractéristique sur laquelle le point dont il s'agit se trouvera placé. Il sera donc situé au lieu où cette caractéristique touche l'arête de rebroussement. Les points de cette espèce sont toujours très-remarquables sur cette arête, à l'égard de laquelle ils sont eux-mêmes des points d'inflexion ou de rebroussement.

596. Il arrive quelquefois que les caractéristiques d'une enveloppe ne se coupent nulle part, et par conséquent que la surface ne présente pas d'arête de rebroussement. Mais alors il existe en général un point sur chaque caractéristique où elle se trouve plus rapprochée de la caractéristique contiguë que dans tout autre lieu. La série de ces points forme sur la surface une ligne que l'on distingue facilement, et que l'on a nommée *ligne de striction*.

Surfaces cylindriques.

597. Une surface cylindrique, considérée de la manière la plus générale, peut être regardée comme l'enveloppe de l'espace décrit par un plan qui se meut sans cesser d'être parallèle à une même droite donnée prise pour directrice. Soient

$$x = az, \qquad y = bz,$$

les équations de cette directrice. L'équation d'un plan étant

$$z = Ax + By + C,$$

ce plan sera parallèle à la droite donnée si l'on a la relation

$$1 = Aa + Bb,$$

au moyen de laquelle on peut éliminer l'une des constantes A, B. En éliminant A, par exemple, il viendra

$$z = \frac{1 - Bb}{a}x + By + C,$$

pour l'équation d'un plan quelconque, parallèle à la droite donnée. Cette équation est ici celle de l'enveloppée, et B, C sont les deux constantes arbitraires qui en déterminent la position. En éliminant donc ces deux constantes entre cette équation et ses deux équations différentielles du premier ordre, qui sont

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1 - Bb}{a},$$

$$\frac{dz}{dy} = B,$$

il viendra

$$a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1,$$

pour l'équation aux différences partielles du premier ordre qui appartient également à l'enveloppée et à l'enveloppe, c'est-à-dire au plan mobile et à une surface cylindrique quelconque décrite par ce plan.

On aurait pu reconnaître immédiatement que

$$a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1$$

appartient à une surface cylindrique quelconque, dont les arêtes sont parallèles à la droite ayant pour équations $x=az$, $y=bz$, en remarquant que tout plan tangent à cette surface doit être parallèle à la droite dont il s'agit.

598. Pour intégrer l'équation précédente, conformément à ce qui a été exposé dans les n°s 478 et suivants, on formera les équations aux différences ordinaires de la caractéristique, qui seront ici

$$ady-bdx=0,$$
$$adz-dx=0,$$
$$bdz-dy=0,$$

Ces équations appartiennent évidemment à une ligne droite parallèle à la directrice, et l'on aurait pu les écrire immédiatement en remarquant que la caractéristique est l'intersection de deux plans parallèles à cette ligne. En intégrant les deux dernières il viendra

$$x=az+\alpha,$$
$$y=bz+\beta,$$

α et β étant deux constantes arbitraires. L'intégrale générale est donc

$$y - bz = \varphi(x - az),$$

φ désignant une fonction arbitraire. Cette équation appartient à toute surface cylindrique, dont la génératrice est parallèle à la directrice proposée. Elle a le même degré de généralité que l'équation aux différences partielles $a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1$. On pourrait la trouver directement en remarquant que les équations d'une génératrice quelconque peuvent être représentées par

$$x = az + \alpha,$$
$$y = bz + \beta,$$

α et β étant deux constantes indéterminées. Or, si un point se meut sur la surface cylindrique sans sortir de cette même génératrice, les coordonnées de ce point satisferont à ces équations. Mais si le point se meut en passant sur une génératrice voisine, ses coordonnées ne pourront satisfaire à ces mêmes équations, à moins que l'on ne fasse varier en même temps α et β. Donc ces quantités demeurent constantes, ou varient simultanément : elles sont donc fonctions l'une de l'autre, et l'on peut écrire $\beta = \varphi(\alpha)$, ou

$$y - bz = \varphi(x - az).$$

599. L'équation

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1 \quad \text{ou} \quad ap + bq = 1$$

étant différentiée par rapport à x et à y, donne

$$a\frac{d^2z}{dx^2}+b\frac{d^2z}{dxdy}=0 \quad \text{ou} \quad ar+bs=0$$

$$a\frac{d^2z}{dxdy}+b\frac{d^2z}{dy^2}=0 \qquad as+bt=0.$$

Donc $rt-s^2=0$, équation générale des surfaces développables. Les surfaces cylindriques présentent, quant à leur courbure, les propriétés qui ont été indiquées n° 577.

600. La fonction φ, dans l'équation générale

$$y-bz=\varphi(x-az)$$

des surfaces cylindriques, peut être déterminée d'après diverses conditions. Si la surface doit passer par une ligne courbe donnée, dont les équations soient $\pi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$, il est visible que ces équations et les deux équations de la génératrice $x=az+\alpha$, $y=bz+\varphi(\alpha)$ doivent pouvoir être satisfaites par les mêmes valeurs de x,y,z, quelles que soient les constantes α et $\varphi(\alpha)$. Ainsi, éliminant x, y, z entre les quatre équations

$$\begin{aligned}
&\pi(x,y,z)=0\\
&\Psi(x,y,z)=0\\
&x-az=\alpha\\
&y-bz=\varphi(\alpha),
\end{aligned}$$

il restera une équation entre α et $\varphi(\alpha)$, qui déterminera la fonction φ. Soit $f(\alpha,\varphi(\alpha))=0$ l'équation dont il s'agit : l'équation de la surface cylindrique demandée sera donc

$$f(x-az,\ y-bz)=0.$$

601. Si la surface cylindrique doit être tangente à une

surface courbe donnée, dont l'équation soit $\pi(x, y, z) = 0$, on remarquera que, pour tous les points de la courbe de contact, les deux surfaces ont le même plan tangent. Donc les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ tirées de l'équation $\pi(x, y, z) = 0$ doivent, pour les points dont il s'agit, satisfaire à l'équation différentielle de la surface cylindrique. On trouvera donc une équation $\Psi(x, y, z) = 0$ de la courbe de contact en prenant les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ dans l'équation donnée $\pi(x, y, z) = 0$, et les substituant dans l'équation aux différences partielles $a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1$. Ayant maintenant deux équations $\pi(x, y, z) = 0$, $\Psi(x, y, z) = 0$, appartenant à une courbe par laquelle doit passer la surface cylindrique cherchée, on opérera comme on l'a vu dans le numéro précédent.

Surfaces coniques.

602. Une surface conique est l'enveloppe de l'espace décrit par un plan qui passe constamment par un point donné. Ce point est le sommet, ou le centre, de la surface. Soient a, b, c ses coordonnées : l'équation du plan mobile ou de l'enveloppée sera donc

$$z - c = A(x - a) + B(y - b);$$

A et B étant deux constantes arbitraires. On déduit de cette équation

$$\frac{dz}{dx} = A, \qquad \frac{dz}{dy} = B;$$

et par conséquent l'élimination de ces deux constantes donne pour l'équation aux différences partielles des surfaces coniques, considérées de la manière la plus générale,

$$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}=z-c.$$

On aurait pu obtenir directement cette équation en remarquant que tout plan tangent à la surface conique doit passer par le centre dont les coordonnées sont a, b, c.

603. Les équations de la caractéristique sont ici

$$\begin{aligned}(x-a)\,dy-(y-b)\,dx&=0\\(x-a)\,dz-(z-c)\,dx&=0\\(y-b)\,dz-(z-c)\,dy&=0:\end{aligned}$$

elles appartiennent évidemment aux projections d'une ligne droite, passant par le point dont les coordonnées sont a, b, c. On déduit des deux dernières

$$\frac{x-a}{z-c}=\alpha,$$
$$\frac{y-b}{z-c}=\beta,$$

α et β représentant deux constantes arbitraires; et par conséquent l'intégrale de l'équation du numéro précédent, ou l'équation d'une surface conique quelconque, est

$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right),$$

φ désignant une fonction arbitraire.

On aurait pu obtenir directement cette équation en re-

montrant que, quand un point se déplace sur une surface conique, les rapports $\frac{x-a}{z-c}$, $\frac{y-b}{z-c}$ demeurent tous deux constants si ce point reste sur une même arête rectiligne, et varient tous deux si le point dont il s'agit passe d'une arête à une autre. Ces rapports demeurant constants ou variant ensemble, sont donc fonctions l'un de l'autre pour toutes les valeurs de x, y, z, qui satisfont à l'équation d'une surface conique.

604. L'équation

$$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}=z-c, \text{ ou } (x-a)p+(y-b)q=z-c$$

étant différentiée par rapport à x et à y donne

$$(x-a)\frac{d^2z}{dx^2}+(y-b)\frac{d^2z}{dxdy}=0, \quad \text{ou} \quad (x-a)r+(y-b)s=0$$

$$(x-a)\frac{d^2z}{dxdy}+(y-b)\frac{d^2z}{dy^2}=0 \qquad (x-a)s+(y-b)t=0.$$

d'où $rt-s^2=0$, relation qui appartient à toutes les surfaces développables. On peut faire ici la même remarque qui a été faite n° 599.

605. Si dans l'équation générale

$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$$

la fonction φ doit être déterminée par la condition que la surface conique passe par une courbe donnée dont les équations soient $\pi(x, y, z)=0$, $\psi(x, y, z)=0$, les équations de la génératrice devront subsister en même temps que celles-ci. Posant donc les quatre équations

$$\pi(x, y, z) = 0$$
$$\Psi(x, y, z) = 0$$
$$\frac{x-a}{z-c} = \alpha,$$
$$\frac{y-b}{z-c} = \varphi(\alpha)$$

entre lesquelles on éliminera x, y, z, il restera une équation que nous représenterons par $f[\alpha, \varphi(\alpha)] = 0$. L'équation de la surface conique demandée sera donc

$$f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0.$$

606. Si la fonction φ doit être déterminée par la condition que la surface conique soit tangente à une surface donnée ayant pour équation $\pi(x, y, z) = 0$, on verra comme dans le n° 601, que l'on obtient une seconde équation $\Psi(x, y, z) = 0$ de la courbe de contact en prenant les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ dans l'équation donnée $\pi(x, y, z) = 0$, et les substituant dans l'équation différentielle $(x-a)\frac{dz}{dx} + (y-b)\frac{dz}{dy} = z - c$. La question se trouve alors ramenée au cas du numéro précédent.

Surfaces de révolution.

607. Une surface de révolution est l'enveloppe de l'espace décrit par une sphère dont le centre se meut sur une ligne droite qui est l'axe de la surface, et dont le rayon varie suivant une loi quelconque. Soient

$$x' = Az' + a$$
$$y' = Bz' + b$$

les équations données de l'axe de la surface. L'équation d'une sphère de rayon r, dont le centre est placé sur cet axe, sera

$$(x - Az' - a)^2 + (y - Bz' - b)^2 + (z - z')^2 = r^2,$$

x, y, z, représentant les coordonnées d'un point quelconque de la sphère. Cette équation appartient donc ici à l'enveloppée ; z' et r sont les deux constantes arbitraires qui peuvent être déterminées de manière à donner une enveloppée quelconque. En différentiant l'équation dont il s'agit par rapport à x et à y, il vient

$$x - Az' - a + (z - z')\frac{dz}{dx} = 0$$

$$y - Bz' - b + (z - z')\frac{dz}{dy} = 0;$$

et en éliminant z',

$$(y - b - Bz)\frac{dz}{dx} - (x - a - Az)\frac{dz}{dy} = B(x - a) - A(y - b)$$

pour l'équation aux différences partielles appartenant à toutes les surfaces de révolution.

On peut obtenir la même équation en remarquant que, dans un point quelconque d'une surface de révolution, le plan tangent est perpendiculaire au plan méridien, c'est-à-dire au plan mené par l'axe de la surface et par le point dont il s'agit. L'équation d'un plan méridien passant par le point de la surface dont les coordonnées sont x, y, z peut être représentée par

$$z' - z = M(x' - x) + N(y' - y),$$

les constantes M, N étant déterminées de manière à faire

passer également ce plan par l'axe de la surface. Cette condition donne la seconde équation

$$z' - z = \mathrm{M}(\mathrm{A}z' + a - x) + \mathrm{N}(\mathrm{B}z' + b - y),$$

qui doit subsister quelle que soit z'. Elle se décompose donc dans les deux suivantes

$$1 = \mathrm{MA} + \mathrm{NB}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{M} = \frac{y - b - \mathrm{B}z}{\mathrm{B}(a - x) - \mathrm{A}(b - y)}$$

$$-z = \mathrm{M}(a - x) + \mathrm{N}(b - y), \qquad \mathrm{N} = \frac{-(x - a - \mathrm{A}z)}{\mathrm{B}(a - x) - \mathrm{A}(b - y)}.$$

Mais l'équation du plan tangent étant

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x) + \frac{dz}{dy}(y' - y),$$

il sera perpendiculaire au plan méridien si l'on a la relation

$$\mathrm{M}\frac{dz}{dx} + \mathrm{N}\frac{dz}{dy} + 1 = 0,$$

équation qui revient à la précédente quand on met à la place de M et N leurs valeurs.

On peut encore obtenir cette équation d'après la propriété générale des surfaces de révolution qui consiste en ce que la normale à un point quelconque rencontre toujours l'axe. Les équations de la normale sont en général

$$x' - x + \frac{dz}{dx}(z' - z) = 0$$

$$y' - y + \frac{dz}{dy}(z' - z) = 0 :$$

les mêmes valeurs de x', y', z' devront donc satisfaire à ces équations et à celles de l'axe. Si l'on élimine x', y', z' entre ces quatre équations, on retrouvera l'équation aux différences partielles dont il s'agit.

608. L'intégration de l'équation

$$(y-b-\mathrm{B}z)\frac{dz}{dx}-(x-a-\mathrm{A}z)\frac{dz}{dy}=\mathrm{B}(x-a)-\mathrm{A}(y-b),$$

dépend, conformément aux nos 478 et suivants, des équations

$$\begin{aligned}(y-b-\mathrm{B}z)dy+(x-a-\mathrm{A}z)dx&=0\\(y-b-\mathrm{B}z)dz-[\mathrm{B}(x-a)-\mathrm{A}(y-b)]dx&=0\\-(x-a-\mathrm{A}z)dz-[\mathrm{B}(x-a)-\mathrm{A}(y-b)]dy&=0\end{aligned}$$

qui appartiennent à la caractéristique. Ces équations ne peuvent être immédiatement intégrées; mais si l'on ajoute les deux dernières après avoir multiplié la première par A et la seconde par B, puis si on les ajoute de nouveau après avoir multiplié la première par $x-a$ et la seconde par $y-b$, on trouvera

$$\begin{aligned}\mathrm{A}dx+\mathrm{B}dy+dz&=0\\(x-a)dx+(y-b)dy+zdz&=0;\end{aligned}$$

et en intégrant

$$\begin{aligned}\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+z&=\alpha\\(x-a)^2+(y-b)^2+z^2&=\beta,\end{aligned}$$

α et β étant deux constantes arbitraires. L'une de ces équations appartenant à un plan quelconque perpendiculaire à l'axe donné de la surface de révolution, l'autre à une sphère

d'un rayon quelconque, dont le centre est placé au point, dont les coordonnées sont a, b, 0, c'est-à-dire au point où cet axe rencontre le plan des x, y, on reconnaît que la caractéristique est toujours un cercle dont le centre est dans l'axe, et dont le plan est perpendiculaire à cet axe. On a d'ailleurs pour l'équation générale des surfaces de révolution

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\varphi(Ax+By+z),$$

φ désignant toujours une fonction arbitraire.

On obtient immédiatement cette équation en remarquant que si un point se déplace sur la surface sans sortir d'une même caractéristique, c'est-à-dire d'une même section faite perpendiculairement à l'axe, ou d'un parallèle, les quantités $Ax+By+z$ et $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2$ conserveront toutes deux des valeurs constantes, tandis qu'elles varieront toutes deux si le point se déplace en passant d'une caractéristique à une autre; d'où il suit que l'une de ces quantités est nécessairement fonction de l'autre.

609. La fonction arbitraire φ dans l'équation précédente peut être déterminée par la condition que la surface passe par une courbe quelconque donnée, dont les équations sont $\pi(x, y, z)=0$, $\Psi(x, y, z)=0$, c'est-à-dire que cette surface soit décrite par la révolution de la courbe autour de l'axe. Comme toutes les caractéristiques doivent rencontrer la courbe donnée, il doit exister des valeurs de x, y, z, qui satisfont à la fois aux quatre équations

$$\pi(x, y, z)=0$$
$$\Psi(x, y, z)=0$$
$$Ax+By+z=\alpha$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\varphi(\alpha).$$

Éliminant x, y, z entre ces équations, il restera une relation entre α et $\varphi(\alpha)$, que nous désignons par $f[\alpha, \varphi(\alpha)]=0$, par laquelle la fonction φ est déterminée. L'équation de la surface demandée est

$$f[Ax+By+z,\ (x-a)^2+(y-b)^2+z^2]=0.$$

610. La fonction arbitraire peut également être déterminée dans l'équation du n° 608, par la condition que la surface de révolution enveloppe une surface quelconque donnée, dont l'équation est $\pi(x, y, z)=0$, c'est-à-dire soit décrite par la révolution de cette surface autour de l'axe. Il est visible que la surface de révolution demandée doit toucher la surface donnée, et qu'on aura une seconde équation primitive appartenant à la courbe de contact en prenant les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ dans l'équation $\pi(x, y, z)=0$, et les substituant dans l'équation différentielle

$$(y-b-Bz)\frac{dz}{dx}-(x-a-Az)\frac{dz}{dy}=B(x-a)-A(y-b).$$

Soit $\Psi(x, y, z)=0$ le résultat de cette substitution : la solution s'achèvera conformément à ce qu'on a vu dans le numéro précédent.

Surface gauche décrite par une ligne droite horizontale, passant toujours par une même verticale.

611. Nous supposerons le plan des xy horizontal et l'axe des z vertical, et nous considérerons la surface décrite par

une ligne droite parallèle au plan des xy, et passant constamment par l'axe des z.

Considérons en premier lieu la surface qui serait l'enveloppe de l'espace décrit par un cylindre de rayon r, dont l'axe demeurerait toujours parallèle au plan des xy, et passerait constamment par l'axe des z. On aurait évidemment

$$\frac{(y-ax)^2}{a^2+1}+(z-c)^2=r^2$$

pour l'équation de ce cylindre, qui est l'enveloppée; a et c étant les deux constantes arbitraires, dont la première représente la tangente de l'angle formé par l'axe du cylindre avec le plan des xz, et la seconde la distance de cet axe au plan des xy. Prenant les deux équations différentielles, il viendra

$$-\frac{(y-ax)a}{a^2+1}+(z-c)\frac{dz}{dx}=0$$

$$\frac{y-ax}{a^2+1}+(z-c)\frac{dz}{dy}=0;$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$(z-c)\left(\frac{dz}{dx}+a\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dz}{dx}+a\frac{dz}{dy}=0, \quad \text{d'où} \quad a=-\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}}$$

valeur qui doit être substituée dans l'équation de l'enveloppée. Mais si nous supposons le rayon r infiniment petit, cas

dans lequel l'enveloppe de l'espace décrit par le cylindre ne différera pas de la surface gauche dont il s'agit, nous devons négliger dans cette équation les termes $(z-c)^2$ et r^2; elle deviendra donc, en y remplaçant a par la valeur précédente,

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=0,$$

qui est l'équation aux différences partielles de cette surface gauche.

On pourrait parvenir directement au même résultat en partant de cette propriété générale des surfaces gauches qui consiste en ce que, pour un point quelconque de ces surfaces, le plan tangent contient la génératrice rectiligne qui passe par ce point. L'équation générale du plan tangent étant

$$z'-z=(x'-x)\frac{dz}{dx}+(y'-y)\frac{dz}{dy},$$

on a

$$(x'-x)\frac{dz}{dx}+(y'-y)\frac{dz}{dy}=0$$

pour l'équation de l'intersection de ce plan par un plan horizontal mené par le point de tangence. Or, cette intersection n'étant autre chose que la génératrice elle-même, qui doit rencontrer l'axe des z, son équation doit être satisfaite par les valeurs $x'=0$, $y'=0$, ce qui donne comme ci-dessus

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=0.$$

612. L'intégrale générale de cette équation s'obtiendra en posant

$$xdy - ydx = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{y}{x} = \alpha$$
$$dz = 0, \qquad z = \beta,$$

α et β étant deux constantes arbitraires; ce qui donne

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

pour l'intégrale cherchée, φ étant le signe d'une fonction arbitraire. La considération de la caractéristique, qui est toujours une ligne droite horizontale ayant pour équations $\frac{y}{x} = \alpha$ et $z = \beta$, conduit directement à cette même équation.

613. Si la fonction arbitraire doit être déterminée de manière à faire passer la surface par une courbe quelconque ayant pour équations $\pi(x, y, z) = 0$, $\Psi(x, y, z) = 0$, on verra comme ci-dessus que l'on doit éliminer x, y, z entre les quatre équations

$$\pi(x, y, z) = 0$$
$$\Psi(x, y, z) = 0$$
$$\frac{y}{x} = \alpha$$
$$z = \beta;$$

et qu'en représentant par $f(\alpha, \beta) = 0$, le résultat de l'élimination, l'équation de la surface demandée est

$$f\left(\frac{y}{x}, z\right) = 0.$$

614. Enfin, si la fonction arbitraire doit être déterminée de manière que la surface gauche, dont il s'agit, touche et embrasse une surface donnée, ayant pour équation $\pi(x, y, z) = 0$, on prendra les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ dans cette équation, et les substituant dans l'équation différentielle $x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0$, on aura une seconde équation primitive $\Psi(x, y, z) = 0$, appartenant à la courbe de contact, ce qui ramène la question au cas du numéro précédent.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

NOTES DE M. LIOUVILLE.

I.

Sur la limite vers laquelle tend l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ *lorsque* m *augmente indéfiniment.*

1. Supposons d'abord que m soit un nombre entier positif. On a, par la formule du binôme démontrée dans les éléments,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{m^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{m^m},$$

de sorte qu'en mettant le terme général

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}\frac{1}{m^n}$$

sous la forme

$$\frac{1}{1.2\ldots\ldots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

il vient

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{m^m}.$$

Le nombre des termes du second membre augmente quand m augmente; et, sauf les deux premiers termes qui restent fixes, chaque terme d'un rang donné augmente aussi : la valeur du second membre augmente en conséquence, mais sans pourtant jamais dépasser la somme

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots\ldots m},$$

ni *a fortiori* la somme

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{m-1}},$$

visiblement comprise elle-même entre 2 et 3. Donc enfin $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend vers une certaine limite, plus grande que 2, plus petite que 3, et que nous désignerons par e.

2. Maintenant, si l'on observe que l'expression

$$\frac{1}{1.2\ldots n}+\frac{1}{1.2\ldots n(n+1)}+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots\ldots m},$$

où n désigne un nombre entier positif quelconque moindre que m, est plus petite que

$$\frac{1}{1.2\ldots\ldots n}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n+1)^{m-n}}\right),$$

et partant moindre que

$$\frac{1}{1.2\ldots\ldots n}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{1.2\ldots\ldots n}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

on verra que l'on peut poser

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots n}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

inégalité qui devra subsister, quelque grand qu'on fasse m, en laissant n fixe, après avoir donné à n une valeur à volonté. On en conclut, à la limite :

$$e < 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots n}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Mais, d'un autre côté, la formule

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)+\ldots\ldots+\frac{1}{m^m}$$

nous donne

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right).$$

Cette fois encore, laissons n fixe et faisons grandir m à l'infini. Le second membre tendra vers la limite

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n},$$

et le premier vers la limite e. On a donc

$$e > 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2\ldots.n}.$$

Les deux expressions entre lesquelles le nombre e se trouve compris ne diffèrent entre elles que par le terme

$$\frac{1}{1.2\ldots.n} \cdot \frac{1}{n},$$

qu'on rend aussi petit qu'on veut, en prenant n grand : elles permettent de calculer la valeur 2,718..... de e avec toute l'approximation qu'on voudra.

3. Soit à présent m positif, sans être un entier; et je dis que $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, quand m grandira indéfiniment, tendra encore vers la limite e. Car soient p, $p+1$ les deux entiers successifs entre lesquels m est compris, et qui grandissent comme lui à l'infini : on aura

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^p$$

et

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1}.$$

Or les seconds membres de ces deux inégalités peuvent s'écrire respectivement

$$\left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^{p+1} : \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)$$

et

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p \left(1 + \frac{1}{p}\right);$$

quand p augmente à l'infini, ils tendent vers la limite commune e. Donc $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend aussi vers cette limite.

4. Enfin, soit m négatif et $=-q$. On a

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-q}=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q}}\right)^q,$$

d'où

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\left(\frac{q}{q-1}\right)^q=\left(1+\frac{1}{q-1}\right)^{q-1}\cdot\left(1+\frac{1}{q-1}\right);$$

et l'on retrouve encore pour q infini la limite e.

II.

Nouvelle expression du reste pour les formules de Maclaurin et de Taylor.

1. M. Cauchy a donné une expression nouvelle du reste de la formule de Maclaurin. Pour l'obtenir, représentons par $\varphi(x, z)$ ou simplement par $\varphi(z)$ la quantité

$$f(x) - f(z) - \frac{x-z}{1} f'(z) - \ldots\ldots - \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots.(n-1)} f^{(n-1)}(z)$$

qui s'évanouit pour $z = x$. En différentiant par rapport à z et omettant les termes qui se détruisent, on trouve

$$\varphi'(z) = -\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots.(n-1)} f^{(n)}(z).$$

Mais par la formule de Taylor bornée à deux termes, et en observant que $z = x + (z - x)$, on a

$$\varphi(z) = \varphi(x) + (z-x)\varphi'(x + \theta_1(z-x)),$$

θ_1 désignant une quantité comprise entre 0 et 1. A cause de $\varphi(x) = 0$, cette équation se réduit à

$$\varphi(z) = (z-x)\varphi'(x + \theta_1(z-x)),$$

puis, en remplaçant la fonction φ' par sa valeur, elle devient

$$\varphi(z) = \frac{\theta_1^{n-1}(x-z)^n}{1.2\ldots.(n-1)} f^{(n)}(x + \theta_1(z-x))$$

ou bien, en posant $\theta_1 = 1 - \theta$,

$$\varphi(z) = \frac{(1-\theta)^{n-1}(x-z)^n}{1.2....(n-1)} f^{(n)}(z + \theta(x-z)).$$

Pour le cas particulier de $z = 0$,

$$\varphi(0) = \frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2....(n-1)} f^{(n)}(\theta x);$$

θ est, comme θ_1, compris entre 0 et 1 : $\varphi(0)$ est d'ailleurs la valeur de la quantité

$$f(x) - f(0) - \frac{x}{1} f'(0) - ..... - \frac{x^{n-1}}{1.2....(n-1)} f^{(n-1)}(0):$$

par suite on a

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + ... + \frac{x^{n-1}}{1.2....(n-1)} f^{(n-1)}(0)$$
$$+ \frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2....(n-1)} f^{(n)}(\theta x).$$

Telle est la formule de M. Cauchy, qui pourra souvent être utile pour des discussions de convergence auxquelles l'ancienne expression du reste ne conviendrait pas. Nous engageons nos lecteurs à l'appliquer aux fonctions

$$f(x) = (1-x)^m$$

et

$$f(x) = \log.(1-x),$$

la valeur de x étant supposée positive et < 1.

2. La formule de Maclaurin et celle de Taylor ne sont au fond qu'une même formule considérée sous deux points de vue différents. On appliquera donc aisément à la formule de Taylor le résultat qui précède.

On trouvera

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x)$$
$$+ \frac{(1-\theta)^{n-1} h^n}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+\theta h).$$

III.

Sur les fractions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

1. Lorsque, pour une valeur particulière a de x, une fraction

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, on obtient généralement la vraie valeur A de cette fraction en la remplaçant par la suivante :

$$\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

et faisant ensuite $x = a$. La même règle s'applique encore à la fraction proposée lorsque, pour $x = a$, elle se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Pour démontrer ce théorème dû, je crois, à M. Cauchy, écrivons d'abord

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}:$$

pour $x = a$, le second membre devient $\frac{0}{0}$; sa vraie valeur A

s'obtiendra donc en faisant $x = a$ dans la fraction nouvelle

$$\frac{-\dfrac{F'(x)}{F(x)^2}}{-\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}} = \frac{F'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f(x)^2}{F(x)^2} :$$

on a par suite

$$A = \frac{F'(a)}{f'(a)} \cdot A^2, \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

En appliquant cette règle aux deux quantités

$$x^n \log. x, \qquad \frac{\log. x}{x^n},$$

dont la première doit être regardée comme le quotient de $\log. x$ par $\frac{1}{x^n}$, on trouve, en supposant n positif,

$$x^n \log. x = -\frac{x^n}{n} \log. e = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

et

$$\frac{\log. x}{x^n} = \frac{1}{nx^n} \log. e = 0 \quad \text{pour} \quad x = \infty.$$

2. M. Bertrand a fait observer que la démonstration précédente de la règle de M. Cauchy ne convient pas aux cas où A serait zéro ou l'infini, puisqu'alors on ne pourrait plus diviser par A les deux membres de l'équation

$$A = \frac{F'(a)}{f'(a)} A^2,$$

afin d'en tirer A. Mais voici un moyen très-simple de lever cette difficulté.

Tout se réduit à prouver que la règle de M. Cauchy reste exacte quand la vraie valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$ est nulle; le cas où la valeur cherchée est infinie se ramène en effet à celui-là en renversant la fraction. Or si l'on ajoute à la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$, supposée nulle pour $x = a$, une constante C, d'où résulte la somme

$$\frac{f(x) + CF(x)}{F(x)},$$

la valeur de cette dernière fraction, aussi pour $x = a$, sera précisément la constante C qui n'est ni 0 ni ∞. On pourra donc appliquer la méthode de M. Cauchy et l'on trouvera

$$C = \frac{f'(a) + CF'(a)}{F'(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)} + C,$$

d'où

$$\frac{f'(a)}{F'(a)} = 0 = \frac{f(a)}{F(a)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. Quand la vraie valeur de

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

pour $x = a$, est en elle-même indéterminée, ce qui arrive, par exemple, si l'on prend

$$f(x) = 2x + x \sin. x, \quad F(x) = 1 + 3x + x \cos. x, \quad \text{et} \quad a = \infty,$$

on conçoit qu'il n'y a rien à attendre de la règle indiquée.

Mais je remarquerai ici que la vraie valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$ peut être déterminée, et celle de $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ être néanmoins essentiellement indéterminée. La règle dont nous parlons cesse alors d'être applicable. Cette restriction a également lieu pour le cas des fractions $\frac{0}{0}$. Ainsi pour $x = \infty$, la vraie valeur de

$$\frac{x - \cos. x}{x + \sin. x}$$

est l'unité, tandis que la fraction

$$\frac{1 + \sin. x}{1 + \cos. x},$$

qui résulte du rapport des dérivées des deux termes, est tout à fait indéterminée. Semblablement la fraction

$$\frac{x^2 \cos. \frac{1}{x}}{\sin. x + x^2 \cos. \frac{1}{x}}, \quad \text{ou} \quad \frac{x \cos. \frac{1}{x}}{\frac{\sin. x}{x} + x \cos. \frac{1}{x}},$$

se réduit à zéro pour $x = 0$, et cependant le rapport des dérivées donne

$$\frac{\sin. \frac{1}{x} + 2x \cos. \frac{1}{x}}{\cos. x + \sin. \frac{1}{x} + 2 \cos. \frac{1}{x}},$$

fraction qui ne tend pas vers une limite déterminée lorsque x tend vers zéro.

Peut-être est-il bon d'ajouter que les règles du genre de celles que nous venons de discuter, et qui se rapportent à des valeurs singulières et exceptionnelles, ont presque toujours des cas en défaut qui résultent de leur nature même. Il faut en user avec réserve et s'assurer, dans chacun des exemples auxquels on les applique, que l'usage en est légitime. Ces règles n'en ont pas moins une utilité incontestable; aussi les géomètres ont-ils apprécié depuis longtemps l'extension élégante que M. Cauchy a su donner au théorème de l'Hôpital concernant les fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$.

IV.

Sur un problème de géométrie relatif à la théorie des maxima et minima.

1. Quand on traduit en analyse un problème de géométrie, on doit en général avoir égard à certaines conditions spéciales, attachées à la nature de ce problème, quoique non exprimées explicitement : on arriverait quelquefois à une absurdité si l'on négligeait de tenir compte des conditions implicites dont il s'agit. L'exemple suivant me paraît, à cause de sa simplicité même, bon à développer devant des élèves.

On propose de trouver la ligne droite la plus courte ou la plus longue que l'on puisse mener à un cercle donné, d'un point A pris dans son plan. Soient O le centre du cercle, r son rayon, et x, y les coordonnées rectangulaires d'un des points M de sa circonférence, en sorte que

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

soit de plus $OA = a$, et admettons que l'axe des x coïncide avec la droite OA. On aura

$$\overline{AM}^2 = y^2 + (a - x)^2 = a^2 - 2ax + r^2.$$

Telle est la quantité qu'il faut rendre un *maximum* ou un *minimum*. Or si, d'après la règle ordinaire, on voulait égaler à zéro la dérivée de cette quantité, on trouverait l'équation absurde

$$-2a = 0,$$

d'où il semblerait résulter que le problème n'a aucune solution, tandis qu'évidemment il en a deux.

2. Pour faire disparaître le paradoxe, il suffit d'observer que par la nature même du problème de géométrie qui nous occupe, l'abscisse x ne peut varier qu'entre les limites $-r$, $+r$. Or la fonction

$$a^2 - 2ax + r^2$$

est décroissante quand on suppose, ce qui est permis, a positif : la plus petite valeur de cette fonction répond dès lors à $x = -r$ et la plus grande à $x = r$. Donc, etc.

Si, au lieu de prendre pour axe des x la droite OA, on avait pris une autre droite à volonté, l'analyse seule aurait conduit sans aucune considération accessoire quelconque à la solution demandée, et la difficulté indiquée ne se serait pas présentée à nous. En nommant α, β les coordonnées du point A, on aurait eu

$$\overline{AM}^2 = r^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2,$$

d'où, par la considération ordinaire du *maximum* ou *minimum*,

$$\alpha + \beta \frac{dy}{dx} = 0.$$

Mais l'équation du cercle donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};$$

il vient donc

$$y = \frac{\beta x}{\alpha}.$$

Cette dernière équation est celle de la droite OA : les points où la droite OA coupe le cercle sont donc les points cherchés. Ici les points dont nous parlons sont immédiatement fournis par la méthode ordinaire. La raison toute simple en est que leurs abscisses sont comprises entre $-r$ et $+r$, et sont différentes de ces deux limites, de telle manière que la fonction

$$\overline{AM}^2 = r^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2$$

augmente lorsqu'on passe, par exemple, de l'abscisse qui répond au *minimum* aux abscisses plus grandes ou plus petites qui sont à côté. Quand on prend, au contraire, la droite OA pour axe des x, le *minimum* répond à $x = r$, mais c'est un *minimum* de $\overline{AM}^2$ ou $a^2 - 2ax + r^2$ sous le point de vue géométrique, en comparant à l'abscisse r des abscisses toutes plus petites que r, et non sous le point de vue analytique où l'on aurait à comparer à l'abscisse r des abscisses à volonté plus grandes ou plus petites.

V.

Sur quelques intégrales définies.

1. Legendre a donné le nom d'intégrales eulériennes de première et de seconde espèce aux deux intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx :$$

qui se présentent souvent dans les applications et dont Euler s'est beaucoup occupé : p, q, n, sont des exposants positifs quelconques. On désigne ordinairement par $\Gamma(n)$ la seconde de ces intégrales, en sorte que

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx,$$

en posant $e^{-x} = z$, ou $x = y^2$, on a encore

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty \left(\log.\frac{1}{z}\right)^{n-1} dz = 2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2n-1}\,dy.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\int e^{-x}x^{n-1}\,dx = \frac{e^{-x}x^n}{n} + \frac{1}{n}\int e^{-x}x^n\,dx :$$

donc, entre les limites $x = 0$, $x = \infty$, il vient

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx,$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \qquad \text{ou} \qquad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

Cette formule permet de calculer la valeur de $\Gamma(n)$, quel que soit l'indice n, lorsque cette valeur est connue pour $n < 1$. Elle donne successivement

$$\Gamma(2) = \Gamma(1), \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1.\Gamma(1),$$
$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2.1.\Gamma(1), \ldots\ldots$$
$$\Gamma(n) = (n-1)\ldots.2.1.\Gamma(1);$$

or

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

Donc

$$\Gamma(n) = 1.2.3\ldots..(n-1),$$

n étant un nombre entier quelconque.

On trouve de même

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ldots..$$
$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}.\frac{2n-3}{2}\ldots..\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Mais

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}.$$

Donc en général

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}.\frac{2n-3}{2}\ldots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}.$$

2. L'intégrale eulérienne de première espèce s'exprime

toujours en fonctions Γ à l'aide de la formule suivante :

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Cette formule est due à Euler. Voici comment M. Poisson la démontre par la considération des intégrales doubles. Il multiplie membre à membre les deux équations

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2p-1}\,dy,$$

$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2q-1}\,dx,$$

et observe que le produit des deux seconds membres est égal à quatre fois l'intégrale double de

$$e^{-(y^2+x^2)} y^{2p-1} x^{2q-1}\,dy\,dx,$$

les limites de l'intégrale étant 0 et ∞ pour les deux variables. On a ainsi

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(y^2+x^2)} y^{2p-1} x^{2q-1}\,dy\,dx.$$

Mais si l'on regarde x et y comme des coordonnées rectangulaires, et qu'on y joigne une troisième coordonnée z perpendiculaire aux deux autres, l'intégrale double dont nous venons de parler représentera le volume compris dans l'angle des coordonnées positives, entre les plans des xy, des xz, des yz, et la surface dont l'équation est

$$z = e^{-(y^2+x^2)} y^{2p-1} x^{2q-1}.$$

L'expression de ce volume changera de forme si l'on rem-

place les coordonnées rectangulaires x et y par des coordonnées polaires r et ω, en faisant.

$$x = r\cos.\omega, \qquad y = r\sin.\omega.$$

L'élément de volume sera $z.rdrd\omega$, et il faudra intégrer entre les limites

$$\omega = 0, \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \quad r = 0, \quad r = \infty.$$

On aura ainsi

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} z.rdrd\omega,$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}.r^{2(p+q)-1}\sin.^{2p-1}\omega.\cos.^{2q-1}\omega.drd\omega,$$

en remplaçant z et ensuite y et x par leurs valeurs. L'intégrale double placée dans le second membre est le produit de deux intégrales simples, dont l'une, savoir :

$$\int_0^\infty e^{-r^2}.r^{2(p+q)-1}dr$$

est égale à $\frac{1}{2}\Gamma(p+q)$, et dont l'autre, savoir :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2p-1}\omega\cos.^{2q-1}\omega d\omega,$$

se réduit à

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

n.$\omega = \sqrt{x}$. Il suit de là que

$$= \Gamma(p+q)\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx;$$

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

la formule d'Euler. On voit par cette for-
rale eulérienne de première espèce est une
que des deux paramètres p et q dont elle dé-

sant la formule d'Euler, M. Lejeune Dirichlet
ultats intéressants. Il a considéré l'intégrale

$$\int \ldots \int x^{a-1} y^{b-1} \ldots z^{c-1}\,dx\,dy \ldots dz,$$

variables $x, y, \ldots, z$ doivent prendre toutes
ves qui satisfont à l'inégalité

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \ldots + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r < 1:$$

.. $\gamma, p, q, \ldots r$ sont des constantes positives.
l. Dirichlet l'a conduit à une valeur remar-
voir

$$\frac{\alpha^a \beta^b \ldots \gamma^c}{pq \ldots r} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\ldots+\frac{c}{r}\right)},$$

it-il, obtenir par différents moyens, et qui
nd nombre de résultats relatifs aux volumes,

centres de gravité, moments d'inertie, etc. Cette formule peut se démontrer de la manière suivante.

4. D'abord en remplaçant

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p \text{ par } x, \quad \left(\frac{y}{\beta}\right)^q \text{ par } y, \ldots, \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r \text{ par } z,$$

et $dx, dy, \ldots, dz$ par

$$\frac{\alpha}{p} x^{\frac{1}{p}-1} dx, \quad \frac{\beta}{q} y^{\frac{1}{q}-1} dy, \ldots, \quad \frac{\gamma}{r} z^{\frac{1}{r}-1} dz,$$

on a

$$V = \frac{\alpha^a \beta^b \ldots \gamma^c}{pq \ldots r} . U,$$

U étant une intégrale

$$(4) \qquad \int\int \ldots \int x^{\frac{a}{p}-1} . y^{\frac{b}{q}-1} \ldots z^{\frac{c}{r}-1} . dxdy \ldots dz,$$

de même forme que V, mais dans laquelle $x, y, \ldots, z$ doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$x + y + \ldots\ldots + z < 1.$$

En posant

$$\frac{a}{p} = k, \quad \frac{b}{q} = l, \ldots, \quad \frac{c}{r} = m,$$

il viendra

$$\int\int \ldots \int x^{k-1} . y^{l-1} \ldots z^{m-1} . dxdy \ldots dz,$$

et il s'agira de prouver que

$$(5) \qquad U = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)\ldots\Gamma(m)}{\Gamma(1 + k + l + \ldots + m)}.$$

ıombre des variables x, y, etc., se réduit à

$$= \int_0^1 x^{k-1}\,dx = \frac{1}{k} = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(1+k)}:$$

t donc exacte alors.

ement, d'après un théorème connu, lorsque ariables x, y, etc., se réduit à 2 : il vient

$$dx \int_0^{1-x} y^{l-1}\,dy = \frac{1}{l}\int_0^1 x^{k-1}.(1-x)^l.\,dx.$$

le d'Euler, on a

$$x^{k-1}(1-x)^l.\,dx = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l)}{\Gamma(1+k+l)},$$

$$\frac{1}{l}\,\frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l)}{\Gamma(1+k+l)} = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(1+k+l)},$$

avec la formule (5).

maintenant que U soit une intégrale triple : e ainsi :

$$\int_0^1 x^{k-1}\,dx \int_0^{y_1} y^{l-1}\,dy \int_0^{z_1} z^{m-1}\,dz,$$

ıtant respectivement les différences $1-x$, orte que l'on a

$$1-x = y_1, \quad y_1 - y = z_1.$$

u et v de nouvelles variables, et posons

$$z = vz_1, \quad y = uy_1;$$

les limites communes de u et v seront 0 et 1 : l'intégrale U prendra ainsi la forme

$$U = \int_0^1 x^{k-1}\,dx \int_0^1 u^{l-1}\,y_1^{\,l}\,du \int_0^1 v^{m-1}\,z_1^{\,m}\,dv;$$

puis, à cause de

$$y_1 = 1 - x, \quad z_1 = y_1 - uy_1 = (1-x)(1-u),$$

elle deviendra

$$U = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l+m}\,dx \,.\, \int_0^1 u^{l-1}(1-u)^m\,du \,.\, \int_0^1 v^{m-1}dv.$$

Les intégrations relatives aux diverses variables peuvent maintenant s'effectuer indépendamment l'une de l'autre, et comme on a

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l+m}\,dx = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(1+l+m)}{\Gamma(1+k+l+m)},$$

$$\int_0^1 u^{l-1}(1-u)^m\,du = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+l+m)}, \quad \int_0^1 v^{m-1}\,dv = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(1+m)},$$

la valeur de U sera finalement

$$U = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(1+k+l+m)},$$

conformément à la formule (5).

S'il y a quatre variables indépendantes x, y, z, t, dans l'intégrale U, la valeur de cette intégrale s'obtiendra encore par le même procédé. On supposera les intégrations effectuées successivement sur t, z, y et x, et l'on posera

$: = y_1,\ y_1 - y = z_1,\ z_1 - z = t_1,$

es à t, z, y et x seront respectivement 0 et t_1, 0 et 1 : si donc on remplace t, z et y par de les liées aux premières par les relations

$$= wt_1, \quad z = vz_1, \quad y = uy_1,$$

unes à ces nouvelles variables seront 0 et 1 :

$$_1 = (1-x)(1-u), \quad t_1 = (1-x)(1-u)(1-v);$$

, les variables x, u, v, w pourront être sé- tres termes l'intégrale multiple U se décom- produit de quatre intégrales qui toutes s'ex- es fonctions Γ à l'aide de la formule d'Euler. est générale, et quel que soit le nombre des , etc., elle conduit à la formule (5) qui se nontrée.

VI.

Sur l'évaluation approchée du produit $1.2.3.....x$, *lorsque* x *est très-grand.*

1. La méthode dont je me servirai pour démontrer la formule de Stirling qui sert à cette évaluation, ressemble beaucoup à celle employée par M. Lacroix dans son *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral* (page 678 de la cinquième édition). Cette méthode consiste à chercher le logarithme du produit $1.2.3.....x$, et elle repose sur la formule connue de Wallis

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{2x}{2x-1}\cdot\frac{2x}{2x+1}\cdots\cdots$$

en vertu de laquelle la quantité

$$\begin{aligned}&2\log.2+2\log.4+\ldots\ldots+2\log.(2x-2)+\log.(2x)\\&-2\log.1-2\log.3-\ldots\ldots-2\log.(2x-3)-\log.(2x-1)\end{aligned}$$

se réduit à $\log.\pi-\log.2$ lorsque $x=\infty$. Mais je la compléterai en donnant une limite supérieure de l'erreur commise dans l'évaluation approchée de $\log.(1.2.3.....x)$.

2. Pour toute valeur positive de z, on a

$$\frac{1}{z}=\int_0^\infty e^{-\alpha z}d\alpha,$$

intégrant par rapport à z et désignant par
ıme népérien,

$$\log. z = \int_0^{\infty} \frac{(e^{-\alpha} - e^{-\alpha z})d\alpha}{\alpha}.$$

vement, dans cette formule, $z = 1$, $z = 2$,
; ajoutant les résultats ainsi obtenus, il nous

$$3 \ldots\ldots x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha}d\alpha}{\alpha}\left(x - \frac{1 - e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}}\right).$$

ın est ramenée à trouver la valeur de l'inté-
cée dans le second membre de l'équation (2).
ıtte intégrale par u, et traitons x comme une
ıe. En différentiant nous obtiendrons

$$\frac{du}{dx} = \int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha}\left(e^{-\alpha} - \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{e^{\alpha} - 1}\right).$$

ın $\frac{\alpha}{e^{\alpha} - 1}$ qui sert de coefficient à $e^{-\alpha x}$ et que
ns par $f(\alpha)$, peut se développer en une série
nt les puissances de α. En différenciant plu-
ıite l'équation

$$(e^{\alpha} - 1)f(\alpha) = \alpha,$$

$$(e^{\alpha} - 1)f'(\alpha) + e^{\alpha}f(\alpha) = 1,$$

$$\alpha - 1)f''(\alpha) + 2e^{\alpha}f'(\alpha) + e\alpha f(\alpha) = 0,$$

$$)f'''(\alpha) + 3e^{\alpha}f''(\alpha) + 3e\alpha f'(\alpha) + e^{\alpha}f(\alpha) = 0,$$

. . . . . .

ı posant $\alpha = 0$, on trouve sans difficulté

$$f(0)=1, \qquad f'(0)=-\frac{1}{2}, \qquad f''(0)=\frac{1}{6}, \ldots\ldots$$

Les deux premiers termes du développement de $f(\alpha)$ sont donc $1-\frac{\alpha}{2}$; et les autres ne peuvent contenir que des puissances paires de α, car la différence

$$f(\alpha)-1+\frac{\alpha}{2}$$

est égale à la moitié de

$$\frac{\alpha\left(e^{\frac{\alpha}{2}}+e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)}{e^{\frac{\alpha}{2}}-e^{-\frac{\alpha}{2}}}-2,$$

et par conséquent est une fonction paire de α.

Les valeurs générales de $f''(\alpha)$ et de $f'''(\alpha)$ sont

$$f''(\alpha)=\frac{e^{\alpha}}{(e^{\alpha}-1)^3}\left((\alpha-2)e^{\alpha}+\alpha+2\right),$$

$$f'''(\alpha)=-\frac{e^{\alpha}}{(e^{\alpha}-1)^4}\left((\alpha-3)e^{2\alpha}+4\alpha e^{\alpha}+\alpha+3\right).$$

En se rappelant que la variable α est >0, on peut prouver que la première de ces deux dérivées est essentiellement positive et la seconde essentiellement négative.

Il suffit pour cela de prouver que les valeurs des deux facteurs

$$(\alpha-2)e^{\alpha}+\alpha+2$$

et

$$(\alpha-3)e^{2\alpha}+4\alpha e^{\alpha}+\alpha+3$$

ce qui deviendra évident si l'on développe
ponentielles qu'ils contiennent, au moyen de

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}$$

trouvera ainsi le premier de ces facteurs

$$\bar{4} + \ldots\ldots + \frac{\alpha^m}{2.3\ldots\ldots(m-2)(m-1)m} + \ldots\ldots,$$

gal à

$$\frac{\alpha^6}{30} + \ldots\ldots + \frac{4n + 2^{n-1}(n-6)}{1.2.3\ldots\ldots n}\alpha^n + \ldots\ldots,$$

ermes sont positifs.
près cela que $f''(\alpha)$ est une fonction décrois-
ont la plus grande valeur est égale à $f''(0)$,
$\frac{1}{6}$.
ette digression, revenons au développement
ès une formule connue, nous pourrons écrire

$$\frac{\alpha}{e^\alpha - 1} = 1 - \frac{\alpha}{2} + R,$$

nt, suivant que l'on voudra pousser le dévelop-
ou moins loin, ou la quantité

$$\frac{\alpha^2}{1.2} f''(\theta\alpha),$$

té

$$\frac{''(0)}{2} + \ldots + \frac{\alpha^{2n} f^{2n}(0)}{1.2\ldots 2n} + \frac{\alpha^{2n+2} f^{2n+2}(\theta\alpha)}{1.2\ldots(2n+2)};$$

c'est ce que l'on comprendra en se rappelant que R est une fonction paire de α : à peine est-il nécessaire d'avertir que θ représente d'une manière générale un certain nombre compris entre 0 et 1. Cette valeur de $f(\alpha)$ substituée dans celle de $\frac{du}{dx}$ fournit

$$\frac{du}{dx} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left(e^{-\alpha} - e^{-\alpha x} + \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha x} - \mathrm{R}e^{-\alpha x}\right),$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (1)

$$\frac{du}{dx} = \log. x + \frac{1}{2x} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}d\alpha}{\alpha}.$$

Par conséquent

$$u = \mathrm{C} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log. x - x + \int_0^\infty \frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}d\alpha}{\alpha^2}.$$

Cette valeur de u est en même temps celle de $\log.(1.2.3\ldots x)$. Nous prouverons plus tard que la constante C est égale à $\log.(\sqrt{2\pi})$.

5. On trouve aisément les limites de l'erreur que l'on commettrait en négligeant dans le second membre le terme

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}d\alpha}{\alpha^2}.$$

A cause de

$$\mathrm{R} = \frac{\alpha^2 f''(\theta\alpha)}{2},$$

ce terme devient

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha x} f''(\theta\alpha)d\alpha.$$

essentiellement positif comme la fonction $f''(\theta\alpha)$.
est moindre que

$$\frac{1}{12}\int_0^\infty e^{-\alpha x}d\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{1}{12x},$$

n a $f''(\theta\alpha) < \frac{1}{6}$.

cussion nous montre qu'en désignant par μ un
nbre compris entre 0 et 1, on peut poser

$$(1.2.3...x) = C + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log.x - x + \frac{\mu}{12x}.$$

on prend

$$= \frac{\alpha^2 f''(0)}{1.2} + ... + \frac{\alpha^{2n} f^{2n}(0)}{1.2...2n} + \frac{\alpha^{2n+2} f^{2n+2}(\theta\alpha)}{1.2...(2n+2)},$$

$$\int_0^\infty \frac{Re^{-\alpha x}d\alpha}{\alpha^2}$$

era sous une autre forme; il deviendra

$$..... + \frac{f^{2n}(0)}{2n(2n-1)x^{2n-1}} + \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}\alpha^{2n} f^{2n+2}(\theta\alpha)dx}{1.2...(2n+2)},$$

veut avoir une limite supérieure de la valeur abso-
ntégrale dont il dépend, et qui exprime le reste de
il suffira de remplacer $f^{2n+2}(\theta\alpha)$ par le maximum
de $f^{2n+2}(\alpha)$, ce qui permettra d'effectuer l'intégra-
rouve ainsi que le reste est numériquement infé-

$$\frac{M}{(2n+1)(2n+2)x^{2n+1}},$$

quantité d'autant plus petite, pour une valeur donnée de n, que x est plus grand.

Au surplus la considération attentive des signes fournit une expression du reste encore plus précise et plus commode.

En effet, à l'aide d'une discussion convenable, et par divers moyens, on s'est assuré que la valeur générale du reste

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}\alpha^{2n} f^{2n+2}(\theta\alpha)d\alpha}{1.2\ldots(2n+2)}$$

change de signe quand on augmente n d'une unité, c'est-à-dire quand on prend dans la série un terme de plus, savoir

$$\frac{f^{2n+2}(0)}{(2n+1)(2n+2)x^{2n+1}};$$

d'où l'on conclut aisément :

1° Que le reste est du signe de ce terme; 2° qu'il est numériquement moindre, puisque, pour en avoir la valeur exacte, il faudrait y ajouter une quantité de signe opposé.

Nous n'entrerons pas dans le détail de la démonstration du théorème qui vient d'être énoncé, n étant un nombre quelconque. La considération des premières dérivées de $f(\alpha)$ suffit aux principales applications, et pour elles le calcul indiqué plus haut est fort simple.

7. Pour déterminer la constante C, mettons l'équation

$$\log.(1.2.3\ldots x) = C + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log.x - x + \frac{\mu}{12x}$$

$$-\log.3+\ldots+\log.x=C+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log.x-x+\text{etc.}$$

ésignant un terme qui s'annule quand $x=\infty$.
erons facilement

$$.og.3+\ldots+\log.2x=C+\left(2x+\frac{1}{2}\right)\log.2x-2x+\text{etc.}$$

$$+\ldots+\log.2x=x\log.2+\log.1+\log.2+\ldots+\log.x,$$

aussi

$$+\log.6+\ldots+\log.2x=C+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log.x+x\log.2$$
$$-x+\text{etc.}$$

ette équation de celle qui donne la somme des
les nombres naturels depuis 1 jusqu'à $2x$, on

$$+\log.5+\ldots+\log.(2x-1)=x\log.x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log.2$$
$$-x+\text{etc.}$$

à son tour le double de cette nouvelle équation
à la précédente, il vient enfin

$$2\log.4+2\log.6+\ldots+2\log.(2x-2)+\log.2x$$
$$.og.3-2\log.5-\ldots-2\log.(2x-3)-2\log.(2x-1)$$
$$=2C-2\log.2+\text{etc.}$$

l'aide de la formule de Wallis citée plus haut,
n faisant x infini,

$$\log.\pi-\log.2=2C-2\log.2,$$

et par suite

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{2}(\log.\pi + \log.2) = \log.(\sqrt{2\pi}).$$

8. En terminant, je renverrai le lecteur à un mémoire de M. Binet, qui fait partie du XXVIIe cahier du *Journal de l'École polytechnique*, et à un article que j'ai inséré au tome XVII du *Journal de Mathématiques*, page 448 : cet article complète en un point important le mémoire de M. Binet, et le lecteur y trouvera d'ailleurs l'indication des divers travaux publiés dans ces derniers temps par les géomètres sur la question qui a fait l'objet de cette note, et sur la question analogue pour $\Gamma(x)$ en ne supposant plus x entier. Bornons-nous ici à mentionner les noms de MM. Raabe, Cauchy et Malmsten.

VII.

ɔlication singulière de la théorie des intégrales la démonstration d'un théorème d'algèbre.

gnant par x et y deux variables indépendantes ɜgarder comme les coordonnées rectangulaires 'is dans un plan fixe horizontal, et par Z une ɜ et déterminée de x et y, qui ne devient pas in- ; limites a et b de x, α et β de y, on voit que les les doubles

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta Z dy, \quad \int_\alpha^\beta dy \int_a^b Z dx$$

ırement égales entre elles, puisqu'elles représen- ıeux un même volume, savoir, le volume com- plan fixe horizontal, quatre plans perpendicu- -là, qui répondent aux limites a, b, α, β, enfin une l'ordonnée verticale est, pour chaque système de deux quantités x et y, représentée par Z. Or on ɔnclure, avec M. Gauss, que le premier membre ıation algébrique à coefficients réels

$$' + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \ldots\ldots + Lz + M = 0$$

soit par un facteur réel du premier degré $z \mp \rho$, facteur réel du second degré $z^2 - 2\rho z \cos.\omega + \rho^2$, ɜ cette équation a toujours au moins une racine naginaire, savoir $\pm\rho$ ou $\rho(\cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega)$.

En d'autres termes, on peut prouver qu'il existe toujours des valeurs réelles des deux quantités ρ et ω satisfaisant à la fois aux deux équations

$$\rho^m \cos. m\omega + A\rho^{m-1} \cos.(m-1)\omega + \ldots\ldots + L\rho \cos.\omega + M = 0,$$
$$\rho^m \sin. m\omega + A\rho^{m-1} \sin.(m-1)\omega + \ldots\ldots + L\rho \sin.\omega = 0;$$

d'où l'on conclut de suite l'existence d'un facteur réel du premier ou du second degré pour le polynôme proposé $z^m + Az^{m-1} +$ etc. (*).

2. Désignons en effet par t et u les premiers membres de ces équations, puis posons

$$t' = \frac{du}{d\omega} = \rho\frac{dt}{d\rho},\quad u' = -\frac{dt}{d\omega} = \rho\frac{du}{d\rho},$$
$$t'' = \frac{du'}{d\omega} = \rho\frac{dt'}{d\rho},\quad u'' = -\frac{dt'}{d\omega} = \rho\frac{du'}{d\rho}.$$

Soit R une quantité positive quelconque, mais plus grande que la plus grande des quantités

$$mA'\sqrt{2},\ \sqrt{mB'\sqrt{2}},\ \sqrt[3]{mC'\sqrt{2}},\ldots\ldots,\ \sqrt[m]{mM'\sqrt{2}}$$

où $A', B', C', \ldots, M'$ désignent les valeurs absolues des coefficients $A, B, C, \ldots, M$. Cela étant, je dis que si l'on pose $\rho = R$, la somme $tt' + uu'$ aura une valeur positive. Pour le montrer, observons d'abord que les quatre quantités suivantes

$$R^m \cos.\frac{\pi}{4} + AR^{m-1} \cos.\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) + \ldots. + M \cos.\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right),$$
$$R^m \sin.\frac{\pi}{4} + AR^{m-1} \sin.\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) + \ldots. + M \sin.\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right)$$

(*) Cette démonstration a été présentée par M. Gauss sous une forme entièrement indépendante de l'emploi des imaginaires.

$$-1)AR^{m-1}\cos.\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)+\ldots+LR\cos.\left(\frac{\pi}{4}+(m-1)\omega\right)$$

$$-1)AR^{m-1}\sin.\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)+\ldots+LR\sin.\left(\frac{\pi}{4}+(m-1)\omega\right)$$

ɜrai respectivement T, U, T', U', sont toutes
ouve, par exemple, pour la première, en dé-
ous cette forme

$$\frac{R^{m-1}}{m\sqrt{2}}\left[R+mA\sqrt{2}\cos.\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)\right]$$

$$\frac{R^{m-2}}{m\sqrt{2}}\left[R^2+mB\sqrt{2}\cos.\left(\frac{\pi}{4}+2\omega\right)\right]$$

$$\frac{R^{m-3}}{m\sqrt{2}}\left[R^3+mC\sqrt{2}\cos.\left(\frac{\pi}{4}+3\omega\right)\right]$$

. . . . . .

ɜlant ce que l'on a dit ci-dessus de la grandeur
ıonstration semblable s'applique aux trois autres
', U'.
= R, on a

$$=T\cos.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)+U\sin.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$

$$=T\sin.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)-U\cos.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$

$$=T'\cos.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)+U'\sin.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)$$

$$=T'\sin.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right)-U'\cos.\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right),$$

lte $tt'+uu'=TT'+UU'$: donc $tt'+uu'$ est
ıt observer en passant que nos équations don-
: $t^2+u^2=T^2+U^2$.

3. Maintenant on peut démontrer le théorème qui fait l'objet de cette note, savoir qu'*entre les limites* $\rho = 0$, $\rho = R$, $\omega = 0$, $\omega = 2\pi$, *il existe certaines valeurs de* ω *et de* ρ *pour lesquelles on a à la fois* $t = 0$, $u = 0$. Car si l'on n'admet pas ce théorème, il faudra en conclure que la fraction

$$Z = \frac{(t^2 + u^2)(tt'' + uu'') + (tu' - ut')^2 - (tt' + uu')^2}{\rho(t^2 + u^2)^2}$$

ne deviendra pas infinie entre les limites citées, et que, par suite, on aura

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} Z d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R Z d\rho.$$

Or

$$\int Z d\omega = \frac{tu' - ut'}{\rho(t^2 + u^2)},$$

comme on le vérifie aisément par la différentiation : de plus, t, u, t', u', reprennent les mêmes valeurs aux deux limites 0 et 2π : par suite, on a

$$\int_0^{2\pi} Z d\omega = 0,$$

en sorte que la première de nos deux intégrales doubles se réduit à zéro. Mais la seconde est au contraire essentiellement > 0. En effet, si l'on intègre d'abord par rapport à ρ, il vient

$$\int Z d\rho = \frac{tt' + uu'}{t^2 + u^2} :$$

d'où

$$\int_0^R Z d\rho = \frac{TT' + UU'}{T^2 + U^2},$$

$$\pi \; d\omega \int_0^R Zd\rho = \int_0^{2\pi} \frac{(TT' + UU')d\omega}{T^2 + U^2},$$

$$2\pi \; d\omega \int_0^R Zd\omega = \text{une quantité positive},$$

ment

$$\frac{(TT' + UU')d\omega}{T^2 + U^2}$$

ement positif. Donc l'équation

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} Zd\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R Zd\rho$$

le; donc aussi la fraction Z devient infinie une ou is, et par suite t et u s'annulent ensemble pour réelles de ρ et ω, C. Q. F. D.

VIII.

Sur l'équation différentielle du premier ordre : $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

1. On sait que pour trouver l'intégrale en série de l'équation différentielle du premier ordre

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

telle que la fournit le théorème de Taylor, il faut exécuter, sur la fonction $f(x, y)$ ou f, les opérations que voici :

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} f = f_1(x, y),$$
$$\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy} f = f_2(x, y),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{df_n}{dx} + \frac{df_n}{dy} f = f_{n+1}(x, y),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Après quoi, l'on a :

$$y = b + \frac{x-a}{1} f(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f_1(a, b) + \text{etc.},$$

b désignant la valeur arbitraire de y pour $x = a$.

Peut-être est-il bon d'ajouter que la considération de la

ui se présente d'abord dans ces calculs, peut
re utile à un autre point de vue.
, si f renferme une constante indéterminée α,
e dans f_1, ou plus généralement qui disparaisse
ait $\varphi(f)f_1$, $\varphi(f)$ désignant une fonction donnée
e f, je dis que la formule

$$\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}(dy - fdx)$$

ondition connue d'intégralité relativement aux
s x et y, prises comme indépendantes; en sorte
e sous forme finie de l'équation (A) sera

$$\int \varphi(f)\frac{df}{d\alpha}(dy - fdx) = constante.$$

stration est très-simple. Puisque $\varphi(f)f_1$ ne con-
on a

$$\frac{d.\varphi(f)f_1}{d\alpha} = 0.$$

; pour f_1 sa valeur

$$f_1 = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}f,$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\varphi(f)\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{d\alpha}\left(f\varphi(f)\frac{df}{dy}\right) = 0.$$

re sans peine que

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\varphi(f)\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}\right),$$
$$\frac{d}{d\alpha}\left(f\varphi(f)\frac{df}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(f\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}\right),$$

et l'on conclut de là finalement que

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}\right)+\frac{d}{dy}\left(f\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}\right)=0\,;$$

c'est précisément l'équation de condition nécessaire et suffisante pour que

$$\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}(dy-fdx)$$

soit une différentielle exacte comme nous l'avions avancé.

IX.

n différentielle du second ordre : $\frac{d^2y}{dx^2} = F(x, y)$.

ion différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x, y),$$

: particulière, puisque l'équation générale serait

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

ropriété remarquable, que M. Jacobi a signalée, tache intimement au théorème établi dans la note On peut, en effet, écrire de suite l'intégrale se- mplète (avec deux constantes arbitraires) de l'é- , dès qu'on a réussi à en découvrir une intégrale ulement.

rouver, soit

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \alpha)$$

rale première, α étant la constante arbitraire in- r l'intégration. En différenciant, on en déduit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx},$$

et par suite, en vertu des équations (1) et (2),

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} f = F(x, y).$$

Cette dernière équation doit être identique; autrement y s'exprimerait au moyen d'une seule constante arbitraire, et ne répondrait plus, comme nous le supposons, à toute l'étendue de l'équation du second ordre (1). Or $F(x, y)$ ne contient pas la constante α; il faut donc que cette constante disparaisse d'elle-même de l'expression

$$f_1 = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} f.$$

D'après le théorème démontré dans la note VIII, la formule

$$\frac{df}{d\alpha}(dy - f dx)$$

se trouve dès lors être une différentielle exacte. De là pour l'équation (2), et par conséquent pour l'équation (1), l'intégrale complète que voici :

$$\int \frac{df}{d\alpha}(dy - f dx) = constante.$$

2. L'équation (1) aurait pu être mise sous une forme un peu plus générale, sans que la méthode employée pour achever l'intégration cessât d'être applicable. Observons en outre que si on la remplace par les deux suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

$$\frac{dy'}{dx} = F(x, y),$$

$$dy : dy' : dx :: y' : F(x, y) : 1,$$

un exemple de l'application d'un principe très-
cobi a nommé le *principe du dernier multi-*
nt ce grand géomètre a montré l'utilité dans
le mécanique. Voyez sur ce principe un article
X du *Journal de Mathématiques*, page 337.

X.

Sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles linéaires.

1. Soit

$$(1) \qquad f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

une équation différentielle de l'ordre n; y, y',.....$y^{(n)}$ étant les dérivées successives de y. L'intégrale complète de cette équation (intégrale que je suppose connue) contiendra n constantes arbitraires a, b,.....c, et sera de la forme $y = F(x, a, b, \ldots\ldots c)$ ou plutôt $\varpi(x, y, a, b, \ldots\ldots c) = 0$. Maintenant, différentions par rapport à a les deux membres de l'équation (1), et représentons par u la dérivée $\frac{dy}{da}$. Il nous viendra

$$(2) \qquad \frac{df}{dy} \cdot u + \frac{df}{dy'} \cdot \frac{du}{dx} + \ldots\ldots + \frac{df}{dy^{(n)}} \cdot \frac{d^n u}{dx^n} = 0.$$

On aurait eu la même équation si, au lieu de poser $\frac{dy}{da} = u$, on avait posé $\frac{dy}{db} = u$ ou $\frac{dy}{dc} = u$. Donc les dérivées de y prises par rapport aux n constantes a, b,..... c représentent autant d'intégrales particulières de l'équation linéaire (2); de sorte qu'en général l'intégrale complète de cette équation (2) est

$$u = A\frac{dy}{da} + B\frac{dy}{db} + \ldots\ldots + C\frac{dy}{dc},$$

A, B,.....C étant des constantes arbitraires.

ème, aussi simple que remarquable, est dû à
en fait la base d'une méthode d'approxima-
mémoire couronné par l'Académie des scien-
rd Jacobi l'a rencontré à son tour, sans con-
l de Lagrange, et s'en est servi dans de belles
le calcul des variations. Il s'étend de lui-même
quelconque d'équations différentielles simul-
l'appliquer à un exemple, considérons le cas
l'équation (1) est de la forme

$$y'' - \varphi(y) = 0;$$

n peut alors s'intégrer, car, en la multipliant
nous donne

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\varphi(y)dy = 0,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a + 2\int \varphi(y)dy,$$

$$x = b + \int \frac{dy}{\sqrt{a + 2\int \varphi(y)dy}}.$$

cette dernière équation, y est une fonction de
il suit du théorème de M. Jacobi que l'équa-
$\frac{d^2u}{dx^2} = \varphi'(y)u$, où $\varphi'(y)$ désigne la dérivée de y,
ntégrale complète de la forme $u = A\frac{dy}{da} + B\frac{dy}{db}$,
soit la fonction φ.

ıes sur la théorie des perturbations que les comètes peuvent
l'action des planètes, tome X, page 65, du Recueil *des*
ıgers.

3. Nous avons dit que Lagrange a déduit de son théorème une méthode d'approximation. Cela est aisé à comprendre. Supposons en effet qu'ayant intégré complétement l'équation

$$(1) \qquad f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

on veuille passer de là à l'intégrale approchée de l'équation

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = Q,$$

où Q désigne une fonction de x dont la valeur est supposée très-petite. Il suffira d'augmenter la valeur de y fournie par l'équation (1) d'un très-petit terme u, vérifiant l'équation

$$\frac{df}{dy}u + \frac{df}{dy'}\frac{du}{dx} + \ldots\ldots + \frac{df}{dy^{(n)}}\frac{d^n u}{dx^n} = Q,$$

qui est linéaire et ne diffère de l'équation (2) ci-dessus qu'en ce qu'elle a un second membre Q, fonction connue de x; en sorte qu'on en trouvera toujours aisément l'intégrale, puisque l'équation (2) s'intègre. On fera d'ailleurs, si l'on veut, une seconde, une troisième approximation, d'une manière analogue.

Cette méthode s'applique à un système quelconque d'équations simultanées. Elle peut servir, par exemple, à déterminer le mouvement troublé d'une planète ou d'une comète, en prenant pour point de départ le mouvement elliptique de cet astre, soit autour du soleil, soit, en général, autour du centre d'action qui prédomine.

FIN.

Paris.—Imprimé par E. Thunot et Cᵉ, rue Racine, 26, près de l'Odéon.

Fig. 3.

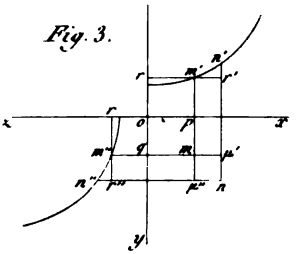


Fig 4.

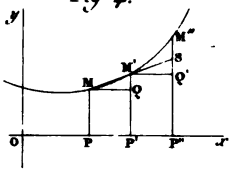


Fig. 13.

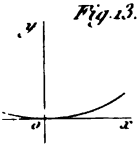


Fig. 14.

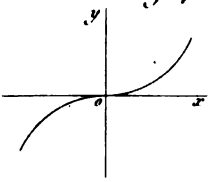


Fig. 15.

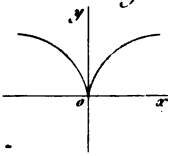


Fig. 18.

Fig. 19.

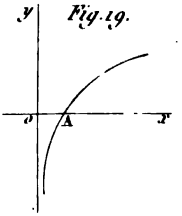


Fig. 20.

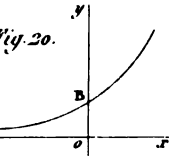


Fig. 23.

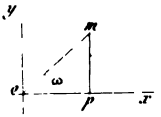
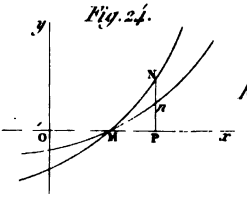


Fig. 24.



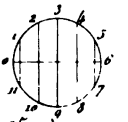
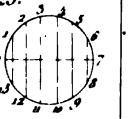


Fig. 25.



Gravé par Adam.

CABOT SCIENCE LIBRARY
CANCELLED
AUG 1 4 2006
AUG 0 4 2006
BOOK DUE

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.